



Ondelettes, analyse de singularités lissées et traitement d'hologrammes numériques de micro-particules

Christophe Ducottet

► To cite this version:

Christophe Ducottet. Ondelettes, analyse de singularités lissées et traitement d'hologrammes numériques de micro-particules. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2003. tel-00511234

HAL Id: tel-00511234

<https://theses.hal.science/tel-00511234>

Submitted on 24 Aug 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des Recherches

présentée

devant l'Université Jean Monnet
Saint-Etienne

Spécialité Image

par

Christophe DUCOTTET

*Ondelettes, analyse de singularités lissées
et traitement d'hologrammes numériques de micro-particules*

Soutenue le 27 novembre 2003 devant le jury :

Rapporteurs

Patrick BOUTHEMY	Directeur de Recherche INRIA, IRISA Rennes
Patrick FLANDRIN	Directeur de Recherche CNRS, ENS Lyon
Philippe REFREGIER	Professeur, Université Aix-Marseille III

Examineurs

Vincent DEVLAMINCK	Professeur, Université Lille 1
Michel JOURLIN	Professeur, Université de Saint-Etienne
Jean-Paul SCHON	Professeur, Université de Saint-Etienne, Président du jury

Sommaire

Partie 1 : Curriculum Vitae

1.	Présentation des activités d'enseignement.....	9
1.1.	Introduction	9
1.2.	Détail des volumes, heures et années de formation.....	9
1.3.	Détail des matières avec leur contenu	10
2.	Présentation des activités de recherche.....	13
2.1.	Présentation de l'équipe et de la thématique de recherche	13
2.2.	Résumé des activités de recherche.....	13
2.3.	Participation à des programmes de recherche publics.....	15
2.4.	Information scientifique et vulgarisation.....	16
2.5.	Développement d'un logiciel de traitement d'images.....	16
3.	Liste des travaux et publications	17
	Thèse	17
	Revue internationale à comité de lecture.....	17
	Revue nationale	17
	Communications avec actes et comité de lecture	17
	Ouvrages collectifs	20
	Communications sans actes.....	20
	Rapports de recherche.....	21
4.	Encadrement de diplômes	23
	Thèses de doctorat.....	23
	Diplômes d'Etudes Approfondies	25
	Diplômes d'ingénieurs / DESS	25

Partie 2 : Synthèse des travaux

	Introduction.....	37
1.	Contexte et stratégie de recherche.....	39
1.1.	Présentation du groupe IMAGE.....	39
1.2.	Thématiques de recherche du groupe	39
1.3.	Implication dans le groupe et stratégie de recherche	40
	1.3.1. Résultats obtenus lors du doctorat	40
	1.3.2. Recherche post-doctorale	40
2.	Analyse de singularités lissées par ondelettes.....	43
2.1.	Rappels sur l'analyse de la régularité locale par ondelettes	44
	2.1.1. Régularité et exposant de Lipschitz	44
	2.1.2. Analyse de singularités par ondelettes	45
	2.1.3. Singularités lissées	47

2.2.	Modèle de singularités lissées	48
2.2.1.	Modèle en dimension 1.....	48
2.2.2.	Modèle en dimension 2.....	50
2.2.3.	Détection et caractérisation	52
2.3.	Détection de points caractéristiques	53
2.3.1.	Signal de phase du gradient.....	54
2.3.2.	Extraction des points caractéristiques	54
2.3.3.	Résultats.....	55
2.4.	Détection et caractérisation de contours	56
2.4.1.	Principales étapes de l'algorithme.....	57
2.4.2.	Paramètres de l'algorithme.....	58
2.4.3.	Résultats.....	58
2.5.	Vers une approche morphologique	61
2.5.1.	Opérateurs de palpé morphologique.....	62
2.5.2.	Application à la détection de pics et de lignes	64
2.6.	Applications.....	67
2.6.1.	Etude de la diffusion turbulente.....	68
2.6.2.	Segmentation de jets diesels.....	69
2.6.3.	Segmentation de radiographies.....	70
2.7.	Conclusion et perspectives	71
3.	Traitement numérique d'hologrammes	75
3.1.	Ondelettes et fonction de restitution adaptée à la localisation	76
3.1.1.	Enregistrement et restitution numérique d'un hologramme	76
3.1.2.	Localisation d'une particule et fonction de restitution.....	82
3.1.3.	Choix d'une fonction de restitution adaptée.....	84
3.2.	Mesure du champ de déplacement par inter-corrélation	85
3.2.1.	Principe de la technique de corrélation	86
3.2.2.	Extraction du masque binaire	87
3.2.3.	Localisation du motif à partir du masque binaire.....	87
3.2.4.	Résultats.....	89
3.3.	Conclusion et perspectives	90
4.	Bilan et perspectives de recherche	93
4.1.	Résumé des principaux résultats.....	93
4.2.	Bilan global des résultats obtenus.....	93
4.3.	Perspectives à moyen terme.....	94
4.4.	Orientations de recherche proposées.....	95
4.4.1.	Orientations dans le cadre du groupe	95
4.4.2.	Orientations transversales au laboratoire.....	96
	Conclusion.....	99
	Bibliographie.....	101

Curriculum Vitae

Synthèse des travaux

Introduction

Cette partie présente la synthèse des travaux de recherche réalisés depuis mon doctorat en 1994. Ces travaux se sont déroulés au Laboratoire Traitement du Signal et Instrumentation (LTSI, UMR CNRS 5516), dans le groupe Image, Modèles Architecture et Géométrie (IMAGe) qui compte aujourd'hui 12 permanents et 18 doctorants ou post-doctorants.

Le groupe IMAGe a pour objectif général de développer des **systèmes de traitement d'images dédiés à l'observation ou la mesure tridimensionnelle** de paramètres dynamiques ou statiques. Les systèmes étudiés font appel à des techniques diverses telles que l'imagerie ou l'holographie de microparticules pour l'analyse d'écoulements, la microscopie confocale ou encore la projection de franges pour des applications biomédicales. Le groupe développe trois axes complémentaires qui concernent : les modèles et outils pour le traitement d'images, les techniques de mesure 3D de mouvement et de forme, et les architectures et protocoles pour la mesure et l'échange de données en temps réel.

Les travaux présentés dans ce mémoire se répartissent en deux principaux thèmes situés dans les deux premiers axes du groupe. Le premier, qui relève des modèles et outils pour l'image, concerne **l'analyse de singularités par ondelettes**. Le deuxième, qui relève de la mesure par traitement d'images, concerne **le traitement numérique d'hologrammes**.

Pour effectuer des mesures sur les images il peut être utile de rechercher des formes particulières ou des primitives élémentaires telles que des points, des contours, les droites,... En pratique, de part la nature des images rencontrées dans les applications, ces primitives n'apparaissent pas nettement à cause de la présence de bruit ou de flou. Il convient alors de **définir des opérateurs de détection adaptés** capables d'obtenir de bonnes performances dans ces conditions. Cette problématique intervient dans un grand nombre d'applications relevant plus généralement de la vision par ordinateur. Dans le contexte du groupe IMAGe, principalement deux catégories d'applications sont considérées : l'imagerie en mécanique des fluides et l'imagerie biomédicale.

Dans le cadre du **premier thème présenté dans ce mémoire**, nous allons montrer comment l'analyse de singularités par ondelettes permet de répondre à cette problématique de **détection de primitives dans un contexte bruité ou flou**. Nous présenterons également une série d'applications traitées dans le cadre de collaborations ou de programmes de recherches.

D'autre part, l'un des enjeux important de l'imagerie en mécanique des fluides est de fournir des mesures, les plus complètes possible, dans le but de mettre au point des modèles numériques de calcul des écoulements. Ainsi, la vélocimétrie par image de particules (ou PIV), introduite dans les années 70, permet de mesurer des champs de déplacement dans un ou plusieurs plans d'un écoulement. Le principe de cette technique peut se résumer en trois étapes : 1. ensemençer ou « marquer » le fluide à étudier à l'aide de microparticules que l'on ajoute artificiellement, 2. éclairer par un plan laser et enregistrer des séquences d'images de ces particules, 3. analyser les séquences obtenues par des techniques de corrélation pour obtenir des champs de déplacement. Le groupe IMAGe a contribué dès son origine au développement de ces techniques de mesure qui associent de manière étroite un dispositif d'acquisition et un algorithme de traitement d'images. Après avoir d'abord travaillé sur les techniques de corrélation, à la suite des travaux de Jean Paul SCHON (Schon, Danel et al. 1979) et de Thierry

FOURNEL (Fournel 1991), il s'est attaché au développement des techniques stéréoscopiques qui permettent d'accéder aux trois composantes du déplacement (Coudert 2002).

Pour obtenir des mesures tridimensionnelles en tous les points d'un volume de mesure, la technique de référence est l'holographie. Cette technique a été appliquée à l'analyse des écoulements dès les années 70 (Royer 1977), en utilisant des plaques photosensibles comme support de stockage de l'information. Depuis quelques années, grâce au développement des capteurs CCD et des techniques de traitement numérique, l'holographie numérique a pu être utilisée pour des mesures quantitatives tridimensionnelles. Nous exposons dans **le deuxième thème de ce mémoire des techniques de traitement numériques d'hologrammes** basées sur la corrélation et la transformation en ondelettes. Nous montrons que ces techniques permettent de mesurer des champs de déplacement 3D de particules.

A travers ces deux thèmes de nature assez différente, nous montrons également que **l'outil transformation en ondelettes** se révèle performant d'une part pour l'analyse de discontinuités dans les images ou les signaux, et d'autre part pour la formalisation et l'analyse du processus de diffraction de la lumière en optique.

Le mémoire est organisé en quatre parties. Dans la première partie, nous présentons le contexte et la stratégie de recherche dans le cadre du groupe IMAGE. Je pourrais notamment préciser les thèmes abordés et situer mon implication et ma contribution personnelle dans ce groupe. La deuxième et la troisième partie traitent respectivement des deux thèmes présentés ci-dessus : l'analyse de singularités par ondelettes (deuxième partie) et le traitement numérique des hologrammes (troisième partie). Enfin, la quatrième partie dresse un bilan et présente les perspectives de ces travaux de recherche.

1. Contexte et stratégie de recherche

Avant de présenter les principaux résultats, il me semble important de préciser l'environnement dans lequel s'est effectuée ma recherche, mon implication dans le groupe ainsi que la chronologie des différents résultats obtenus postérieurement à ma thèse (soutenue en 1994). Cette présentation permettra d'apprécier la démarche intellectuelle qui, au cours de ces quelques années a pu orienter mon travail.

1.1. Présentation du groupe IMAGE

Le groupe IMAGE (Image, Modèle, Architecture et Géométrie) appartient au Laboratoire Traitement du Signal et Instrumentation (LTSI) qui est une unité mixte (UMR CNRS 5516) affiliée à l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne et au CNRS. Ce laboratoire, dirigé par Pierre LAPORTE, comporte environ 40 chercheurs et une trentaine de doctorants. Son domaine d'activité relève des Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication. Il est organisé en 4 groupes de recherche qui concernent : l'instrumentation et les microsystèmes optiques (IMO), les composants à fibres optiques et photosensibilité (CFOP), les lasers et leurs applications (LA) et l'image (IMAGE).

L'effectif du groupe IMAGE est de 14 chercheurs permanents, 11 doctorants et post-doctorants et 2 personnels techniques. Ses activités au sein du Laboratoire TSI sont centrées sur la caractérisation de phénomènes physiques par traitement et analyse d'images, notamment la caractérisation des écoulements et des matériaux.

Un accent tout particulier est mis, en amont, sur la modélisation de la formation de l'image et la représentation de son contenu. Des méthodes d'imagerie 3D sont aussi développées en lien avec les méthodes optiques. Enfin, des architectures spécialisées sont conçues en adéquation avec l'algorithmique pour le traitement d'images temps réel et les communications sécurisées.

Outre sa participation à différents programmes de recherche européens, régionaux ou industriels, le groupe soutient la plate forme « diagnostics optiques » du Pôle Optique et Vision au titre du transfert de technologie.

1.2. Thématiques de recherche du groupe

La recherche au sein du groupe est décomposée en trois opérations :

1. modèles et outils pour le traitement et la caractérisation des images,
2. mesures 3D, de mouvements et de forme,
3. architectures et protocoles pour la mesure et l'échange de données en temps réel.

L'opération de modélisation, qui est la plus amont, a pour objectif de définir des outils et des modèles pour la caractérisation et le traitement des images. Ces outils pourront s'appliquer plus particulièrement au problème de la mesure 3D. Dans ce cadre, deux aspects particuliers sont considérés : d'une part **l'aspect modélisation** qui vise à prendre en compte les propriétés de l'objet, de son milieu et du dispositif d'acquisition, d'autre part **l'aspect détection** qui vise à détecter des primitives caractéristiques de l'objet sur lesquelles pourra porter la mesure.

Dans l'opération de mesure 3D, différentes méthodes optiques sont couplées à des méthodes numériques pour estimer des paramètres physiques ou numériser des surfaces 3D. Ainsi, les techniques de **vélocimétrie par image de particules stéréoscopiques (SPIV)**

permettent la mesure des trois composantes du champ de vitesse ou du champ de déformation dans un écoulement ou dans un matériau. La **microholographie numérique** est une technique alternative permettant l'investigation de volumes épais pour l'estimation des déplacements ou de la granulométrie de particules. En ce qui concerne la numérisation de surfaces 3D, une reconstruction par recalage de vues et fusion de formes étend les possibilités d'une numérisation sur 360° au moyen d'un **système multi-têtes de projections de franges**.

Enfin dans l'opération consacrée aux architectures pour la mesure et l'échange de données, les topologies considérées sont adaptées aux flux d'images (nécessitant le développement de protocoles ad hoc) et basées sur des **composants reconfigurables**. Dans le cadre plus large des sciences et technologies de l'information, la sécurisation de données est abordée.

1.3. Implication dans le groupe et stratégie de recherche

Ma participation à l'activité du groupe se situe sur deux plans. Le premier est celui de la recherche « amont », avec une implication dans les deux premières opérations de recherche. Le deuxième plan est plus appliqué, sous la forme d'une implication dans les programmes de recherche publics et industriels ou les collaborations. Ces deux plans ne sont pas séparés en pratique, de sorte que ma recherche a été orientée alternativement par la théorie et par les applications. La présentation chronologique qui va suivre a pour but de montrer cette dualité théorie-applications tout en précisant les grandes étapes et orientations de mes travaux de recherche.

1.3.1. Résultats obtenus lors du doctorat

Dans le cadre de ma thèse de doctorat soutenue en 1994, j'ai étudié des méthodes de traitement d'images utilisant la transformation en ondelettes en vue de leur application à l'analyse des écoulements. Deux principaux résultats ont été alors obtenus.

Le premier concerne la **mesure de déformation de nuages de particules**. J'ai pu montrer que la transformation en ondelettes permet de détecter et de mesurer la déformation de contours d'objets diffus. L'ondelette utilisée était du type dérivée première et une approche multi-échelle de type « coarse to fine » permettait d'une part de sélectionner des contours significatifs, et d'autre part de les associer entre deux images successives (Ducottet, Jay et al. 1994).

Le deuxième concerne la **microholographie** appliquée à l'enregistrement de particules en suspension dans un fluide. Les hologrammes étaient enregistrés à cette époque de manière analogique, sur des plaques photosensibles. Le dépouillement consistait à repérer la position de chaque particule en déplaçant une caméra dans le champ restitué de l'hologramme. La modélisation du processus de restitution des hologrammes a montré qu'il se forme des anneaux d'interférence au voisinage de chaque particule. J'ai pu alors synthétiser une ondelette adaptée à la détection et au repérage de ces anneaux (Ducottet, Danière et al. 1994).

1.3.2. Recherche post-doctorale

Suite aux résultats obtenus sur la déformation d'objets non rigides, j'ai orienté la suite de mes travaux sur une nouvelle approche par suivi de points caractéristiques le long des contours de l'objet. Dans le cadre de la thèse de Jacques FAYOLLE soutenue fin 1996 (Fayolle 1996), nous avons alors élaboré un premier **modèle unidimensionnel de singularités lissées** et son

analyse à partir d'ondelettes. Ces développements ont permis de mettre au point une méthode de détection de points caractéristiques robustes lors de la déformation de l'objet et vis à vis des changements de conditions de prise de vue. Ces résultats ont donné lieu à deux publications (Fayolle, Ducottet et al. 1998; Fayolle, Riou et al. 2000).

Sur le plan des applications, j'ai ensuite eu l'occasion de contribuer à plusieurs contrats s'appuyant sur des financements industriels et de collectivités territoriales. J'ai alors traité différents problèmes de segmentation, notamment pour la mesure de taille de gouttes dans un jet diphasique, la détection et la mesure de bulles de cavitation dans un réacteur à ultrasons (Thèse de Myriam Chouvellon 1999) ou la segmentation de cailloux en régime torrentiel (Ducottet, Frey et al. 2003). Ces problèmes m'ont conduit à **généraliser le modèle de singularités lissées** à 2 dimensions pour pouvoir l'appliquer à une détection et une caractérisation multi-échelle de contours sur des images (Ducottet and Fayolle 1997; Ducottet, Fayolle et al. 2000).

En Décembre 2000, à l'occasion de la thèse de Cristina BURAGA à l'Université de Rouen, j'apprends que **l'holographie en ligne** que l'on avait utilisée sous forme analogique jusqu'en 1994, peut être mise en œuvre sous une forme entièrement numérique en enregistrant les hologrammes directement sur une matrice CCD. De plus le formalisme de la diffraction peut s'écrire sous la forme d'une transformation en ondelettes à partir d'une ondelette du même type que celle que j'avais synthétisé lors de ma thèse. Nous décidons alors avec Thierry FOURNEL et Corinne FOURNIER d'orienter nos recherches vers une technique de vélocimétrie à base d'holographie numérique. Ces travaux débouchent en 2002 et 2003 sur la mise au point d'un algorithme de corrélation 3D, et d'une fonction de restitution adaptée (Fournier, Ducottet et al. 2003a; Fournier, Ducottet et al. 2003b).

Plus récemment, avec l'arrivée dans l'équipe de Michel JOURLIN, et dans le cadre de la thèse de Cécile BARAT, nous avons commencé un travail de mise en relation des techniques **multi-échelle, de la morphologie mathématique et des modèles logarithmiques** de traitement d'images. Un opérateur de palpation morphologique a été notamment développé pour la détection d'objets ou de primitives géométriques dans les images (Barat, Ducottet et al. 2003c; Barat, Ducottet et al. 2003d).

Parallèlement, des études plus appliquées sont considérées. La première, en collaboration avec l'entreprise EFS et la région Rhône-Alpes (thèse de Jérôme SENESCHAL), concerne l'étude de la formation d'un jet de gazole à la sortie d'un injecteur diesel. La deuxième, dans le contexte du programme de recherche thématique région Adémo, concerne la segmentation de vertèbres sur des images radiologiques. Ces deux études ont été l'occasion **d'appliquer la méthode de détection de contours par ondelettes** à des images présentant des contours diffus et bruités (Barat, Ducottet et al. 2003a; Barat, Seneschal et al. 2004).

2. Analyse de singularités lissées par ondelettes

Une **singularité** dans un signal (qui peut être à plusieurs dimensions pour une image) correspond mathématiquement à un point où le signal n'est pas continu ou n'admet pas de dérivée première continue. Dans le cas des signaux issus de phénomènes physiques, les singularités pures ne sont pas très habituelles : on rencontre plus souvent des **points de variation rapide**. Nous nous intéressons dans ce paragraphe à ces points particuliers que nous considérons comme des **singularités lissées**.

Dans une image, les **points délimitant les contours** des objets sont des singularités lissées particulières de type transition. En effet, lorsque l'on traverse le contour d'un objet, l'intensité de l'image passe rapidement d'un niveau correspondant au fond, à un niveau correspondant à l'intérieur de l'objet. Les contours donnent une représentation compacte du contenu de l'image. Ainsi, ils sont utilisés chaque fois que l'on veut extraire des éléments d'une image pour étudier leur forme ou leurs dimensions. D'autres types de singularités lissées que l'on rencontre fréquemment dans les images sont les pics ou les lignes.

Dans un signal unidimensionnel, on peut également observer des transitions ou des pics : le cas d'une transition correspond notamment à un point où le niveau du signal change brusquement. Suivant la nature du signal, ce type de point pourra avoir une signification particulière. Considérons notamment un signal obtenu à partir du contour d'un objet et donnant la direction de la normale au contour, en fonction de l'abscisse curviligne le long de celui-ci. On obtient de cette façon un signal caractéristique de la forme du contour. Les singularités lissées de type transition correspondent alors aux points de forte courbure du contour. Ce sont des **points caractéristiques** de la forme du contour que l'on peut également qualifier de **singularités le long du contour**. Ce type de point est utile en traitement d'images dans les problèmes d'indexation, de reconnaissance de formes, de mise en correspondance, ou pour la recherche d'un objet particulier dans une base de données d'images.

Depuis les travaux de Jaffard (Jaffard 1989) et de Mallat (Mallat and Hwang 1992; Mallat and Zhong 1992) on sait que la transformation en ondelettes est bien adaptée à l'analyse des singularités. Mais bien que le lien entre ondelettes et détection de contours ait été souligné, ces résultats n'ont pas, à notre connaissance, été utilisés pour élaborer des algorithmes de détection de contours multi-échelle efficaces. **L'originalité de notre approche** consiste à adapter ces résultats au cas de **singularités lissées** particulières pour les appliquer d'une part à la détection de points caractéristiques et d'autre part à la détection de contours dans les images. Cette approche est basée sur une **modélisation de trois types de singularités lissées** rencontrées dans les images réelles (deux types pour les signaux) : les transitions, les pics, et les lignes. Chaque modèle est paramétré par une amplitude et une taille de lissage qui représentent respectivement le contraste et le degré de lissage de la singularité. Les méthodes d'analyse que nous proposons permettent d'une part de déterminer le type, l'amplitude et la taille de lissage des singularités, et d'autre part de les segmenter à une échelle adaptée.

Dans cette partie, nous commençons, dans le premier paragraphe, par rappeler la notion de singularité et son analyse par ondelettes. Nous présentons ensuite, dans le deuxième paragraphe, notre modèle de singularités lissées. Dans les deux paragraphes suivants, nous expliquons successivement comment appliquer ce modèle au problème de la détection de points

caractéristiques, puis au problème de la détection de contours. Dans le cinquième paragraphe, nous nous intéressons à une nouvelle approche par palpement morphologique qui permet d'étendre notre analyse à la détection d'éléments caractéristiques de forme quelconque. Enfin, avant de conclure nous présentons, dans le sixième paragraphe, des résultats obtenus dans le cadre de plusieurs applications.

2.1. Rappels sur l'analyse de la régularité locale par ondelettes

La régularité locale d'une fonction peut être définie à partir de la notion d'**exposant de Lipschitz**. Cet exposant, en mesurant le degré de régularité de la fonction, indique la présence et le type d'une éventuelle singularité. En pratique, le calcul d'une transformation en ondelettes à l'aide d'une ondelette adaptée permet de détecter les points singuliers d'une fonction et d'évaluer leur exposant de Lipschitz. Dans ce paragraphe, nous exposons de manière synthétique les notions d'exposant de Lipschitz, d'analyse de singularités et de singularités lissées. Par souci de simplicité, les explications sont données sur des signaux de dimension 1. Ils sont bien entendu généralisables à la dimension 2 et aux dimensions supérieures. Une présentation plus complète pourra être trouvée dans (Mallat and Hwang 1992).

2.1.1. Régularité et exposant de Lipschitz

Lorsque l'on s'intéresse à la régularité locale d'une fonction en un point, on regarde généralement si la fonction est continue ou dérivable en ce point (si elle est dérivable, on peut déterminer combien de fois elle l'est). Considérons le cas d'une fonction f continue mais non dérivable en un point particulier x_0 , son taux d'accroissement n'admet donc pas de limite. Si cette fonction n'est pas oscillante en x_0 , ce taux d'accroissement n'est certainement pas borné. C'est à dire que l'on ne peut pas trouver de constante A telle que, lorsque x tend vers x_0 :

$$|f(x) - f(x_0)| < A|x - x_0|$$

Dans ce cas, on peut rechercher une condition plus faible qui revient à déterminer s'il existe un exposant $0 < \alpha < 1$ et une constante A tels que, lorsque x tend vers x_0 :

$$|f(x) - f(x_0)| < A|x - x_0|^\alpha$$

Une autre façon de raisonner revient à dire qu'au lieu de chercher à développer la fonction f à l'ordre 1 en x_0 , on cherche à la développer à un ordre fractionnaire α avec $\alpha < 1$. Par définition, le plus grand exposant α_0 vérifiant l'équation (2) sera défini comme l'**exposant de Lipschitz** de la fonction f en x_0 .

La définition peut s'étendre d'abord au cas des points où la fonction f est dérivable en x_0 . Pour cela, il suffit de déterminer l'ordre n jusqu'auquel la fonction est dérivable, puis de rechercher l'exposant de Lipschitz β_0 de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de cette fonction. On pourra alors définir l'exposant de Lipschitz α_0 de f comme :

$$\alpha_0 = \beta_0 + n$$

De même, la définition peut s'étendre, dans le cadre de la théorie des distributions, au cas des points où la fonction n'est pas continue. On détermine pour cela le nombre m de fois qu'il faut intégrer la fonction pour la rendre continue, puis on détermine l'exposant de Lipschitz γ_0 du résultat. L'exposant de Lipschitz correspondant de f sera :

$$\alpha_0 = \gamma_0 - m$$

Ainsi, la notion d'exposant de Lipschitz permet de préciser la notion de dérivée en un point. Si cet exposant est supérieur à 1, la fonction est dérivable en ce point, s'il est compris entre 0 et 1, la fonction est continue mais non dérivable et s'il est inférieur à 0, la fonction n'est pas continue en ce point. On dira qu'une fonction présente une singularité si son coefficient de Lipschitz est strictement inférieur à 1. Par exemple, un échelon (ou fonction de Heaviside) présente une singularité d'exposant 0 en 0, alors qu'une distribution de Dirac présente une singularité d'exposant -1 .

2.1.2. Analyse de singularités par ondelettes

Si l'on veut analyser les singularités d'une fonction à l'aide d'une ondelette, il faut que cette dernière soit définie à partir de la dérivée d'une fonction de lissage. Considérons l'ondelette dérivée première de gaussienne. Elle est donnée par la fonction ψ définie par :

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

La famille d'ondelettes correspondante est obtenue en appliquant à l'ondelette mère ψ une série de dilatations par un facteur d'échelle s . Pour chaque échelle, la fonction ψ_s obtenue est définie par :

$$\psi_s(x) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{x}{s}\right)$$

La transformée en ondelettes Wf de la fonction f est une fonction dépendant des deux variables x et s . Elle est obtenue en convoluant la fonction f avec les différents éléments de la famille d'ondelettes (l'opérateur de convolution est noté $*$) :

$$Wf(x, s) = f * \psi_s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_s(x - t) dt \quad (1)$$

D'après cette définition, pour une échelle s fixée, la transformée en ondelettes de la fonction f est le résultat du filtrage de la fonction avec un filtre qui est égal à l'ondelette à l'échelle s . Du fait que cette ondelette est la dérivée d'une fonction de type passe-bas, le filtrage par l'ondelette à l'échelle s est équivalent à un lissage par un filtre de taille s suivi d'une dérivation. Ce type de filtre est utilisé de manière classique en détection de contours.

La dernière interprétation nous permet de comprendre qu'avec une telle ondelette, **les singularités de la fonction analysée se traduisent par des points d'amplitude maximale dans sa transformée en ondelettes sur une large gamme d'échelles**. En ne retenant que les points qui sont des **maxima locaux de la transformée en ondelette**, on obtient des **chaînes de maxima** pointant vers les points singuliers de la fonction. Le squelette obtenu permet d'identifier et de localiser facilement ces singularités.

La Figure 1 donne l'exemple d'une fonction présentant 2 types de singularités, sa transformée en ondelettes calculée à partir de l'ondelette dérivée première de gaussienne, et le squelette obtenu.

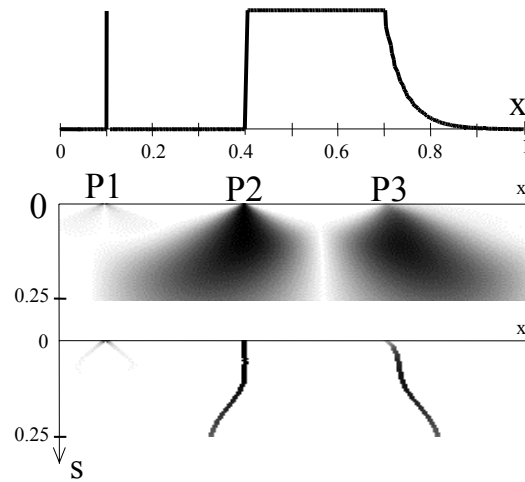


Figure 1 : Transformée en ondelette et squelette d'un signal présentant 3 types de singularités : P1 est une distribution de Dirac d'exposant de Lipschitz -1 , P2 est une fonction de Heaviside d'exposant 0 , P3 est un point irrégulier d'exposant 0.6 .

En plus de permettre la détection et la localisation des singularités, la transformée en ondelettes permet d'accéder à l'exposant de Lipschitz des points singuliers. Pour cela, il suffit d'examiner la **loi de variation de l'amplitude de la transformée en ondelettes le long des chaînes de maxima**. On peut montrer que lorsque l'échelle tend vers 0 , cette amplitude varie comme une loi de puissance dont l'exposant est justement égal à l'exposant de Lipschitz.

Plus précisément, si (x, s) appartient à une chaîne de maxima, alors il existe une constante K telle que, lorsque l'échelle s tend vers 0 :

$$|Wf(s, x)| \leq Ks^\alpha \quad (2)$$

La Figure 2 présente les courbes donnant l'amplitude de la transformée en ondelettes le long des lignes de maxima du signal la Figure 1, en coordonnées logarithmiques. On retrouve dans ce cas, en examinant la pente à l'origine de ces courbes, l'exposant de Lipschitz de chaque singularité.

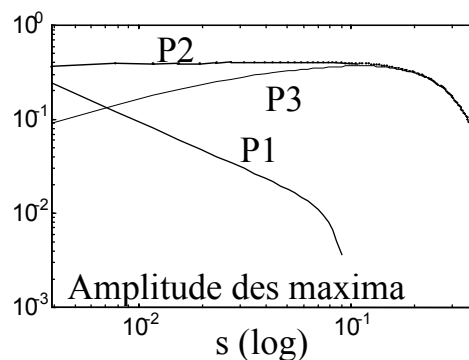


Figure 2 : Fonctions de maxima d'ondelettes en échelle logarithmique. Pour l'échelle tendant vers 0 , on retrouve des droites de pentes respectives -1 , 0 et 0.6 correspondant aux exposants de Lipschitz des points.

Il faut préciser également que lorsque qu'un point n'est pas singulier, mais présente une irrégularité dont l'exposant de Lipschitz est supérieur ou égal à 1, le comportement de sa transformée en ondelettes correspond à une loi de puissance d'exposant 1. Ceci est lié au type de l'ondelette utilisée qui est la dérivée première d'une gaussienne. En fait, **le plus grand exposant de Lipschitz mesurable est égal à l'ordre de dérivation de l'ondelette.**

2.1.3. Singularités lissées

Lorsque l'on traite des signaux réels issus de phénomènes physiques, comme par exemple les images, les singularités ne sont en général pas présentes à l'état pur. Une première raison est que ces signaux sont observés à travers des dispositifs dont la bande passante est limitée (par exemple l'objectif et le système d'acquisition pour une image). Une deuxième raison est que ces signaux peuvent par nature ne pas être singuliers à cause de phénomènes physiques « annexes » que l'on ne prend pas en compte (par exemple la diffraction ou la diffusion dans le cas d'une image).

En pratique, ces phénomènes contribuent généralement à régulariser le signal, en gommant ses singularités de sorte qu'ils peuvent être modélisés comme une contribution de type filtrage passe bas. On peut alors définir la notion de **singularité lissée de taille σ** comme le résultat du filtrage d'une singularité par une gaussienne d'écart type σ . Ainsi, une singularité lissée sera caractérisée par un **exposant de Lipschitz et une taille de filtre.**

Il est important de préciser à ce stade que, comme son nom ne l'indique pas, une singularité lissée n'est pas une singularité : le lissage gaussien a pour effet de rendre le signal infiniment dérivable !

Le comportement de la transformée en ondelettes d'une singularité lissée est modifié par rapport à une singularité pure : son amplitude le long de la chaîne de maxima est fonction de l'exposant α et de la taille σ de la singularité. On montre que l'équation (2) devient :

$$|Wf(s, x)| \leq K \frac{s}{(s^2 + \sigma^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}} \quad (3)$$

Cette relation ne correspond plus à une simple loi de puissance, il est donc plus compliqué de déterminer les paramètres d'une singularité lissée. On peut cependant remarquer que lorsque l'échelle s tend vers 0, l'amplitude de la transformée en ondelettes se comporte comme une loi de puissance 1, alors que lorsque l'échelle tend vers l'infini, cette amplitude se comporte comme une loi de puissance α . Ainsi, lorsque l'échelle tend vers 0, on retrouve que l'exposant de régularité mesuré est égal à l'ordre de dérivation de l'ondelette (ce qui est normal puisqu'une singularité lissée par une gaussienne est infiniment dérivable). D'autre part, le comportement en loi de puissance α , caractéristique de la singularité sous-jacente, se retrouve aux grandes échelles.

A titre d'exemple, la Figure 3 présente l'analyse en ondelettes du signal de la Figure 1, après un filtrage par une gaussienne d'écart type 2.

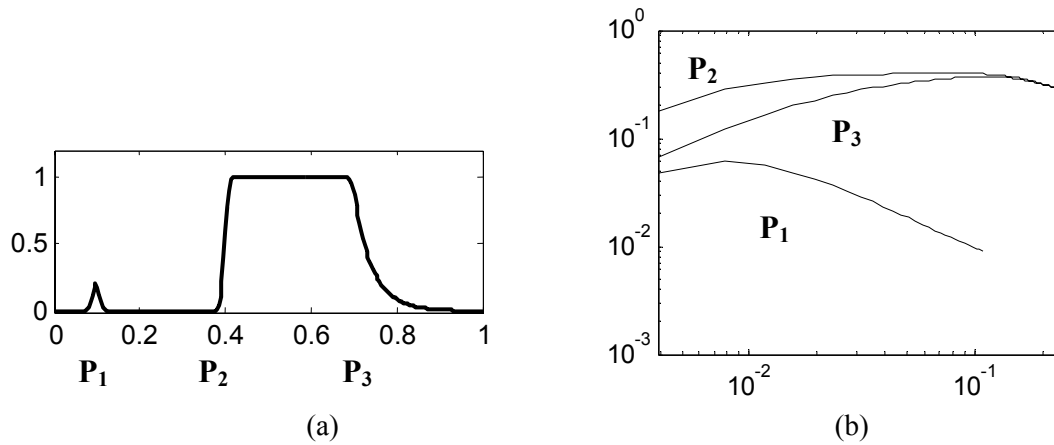


Figure 3 : Analyse en ondelettes d'un signal présentant des singularités d'exposant -1 , 0 et 0.6 lissées par une gaussienne d'écart type $1/128$. Signal original (a), fonctions de maxima après analyse (b).

2.2. Modèle de singularités lissées

Lors de l'analyse d'un signal réel, certains types de singularités lissées ont une interprétation plus facile. Par exemple, une singularité d'exposant 0 correspond à une transition plus ou moins rapide entre 2 niveaux constants, alors qu'une singularité d'exposant -1 correspond à un pic d'une certaine largeur.

Dans ce paragraphe, nous présentons un modèle mathématique de ces singularités lissées particulières puis nous indiquons comment les caractériser ; c'est à dire comment déterminer, à partir de l'analyse en ondelette, leur type et leurs paramètres. Le modèle et le principe de la caractérisation sont donnés pour le cas des signaux de dimension 1 et 2.

2.2.1. Modèle en dimension 1

Le modèle que nous retenons en dimension 1 correspond à deux singularités lissées particulières : la singularité lissée d'exposant 0 que nous appellerons transition, et la singularité lissée d'exposant -1 que nous appellerons pic. Ces deux singularités lissées sont caractérisées par une amplitude A et une taille de lissage σ .

Dans un signal, une transition correspond à un saut rapide d'amplitude A avec un temps de montée proportionnel à σ . Un pic, quant à lui correspond à une brève impulsion de forme gaussienne d'amplitude A et dont la largeur est proportionnelle à σ (cf. Figure 4).

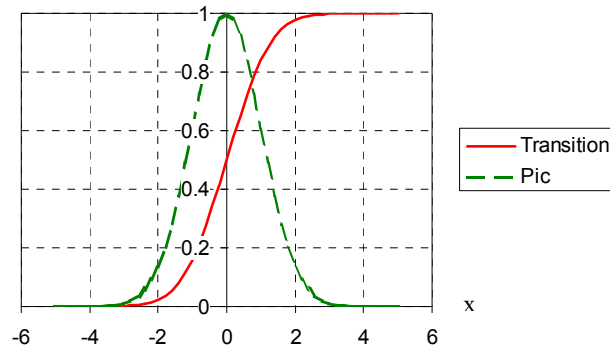


Figure 4 : Graphe représentant la transition et le pic en dimension 1 pour une amplitude et une taille de lissage unitaires.

Notons G_σ la fonction gaussienne normalisée d'écart type σ définie par :

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Notons également H la fonction de Heaviside définie par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Les fonctions T_σ et P_σ qui caractérisent la transition et le pic sont définies comme le résultat du lissage par G_σ respectivement d'une fonction de Heaviside et d'une distribution de Dirac. Les expressions obtenues sont données par le Tableau 1.

Transition	Pic
$T_\sigma(x) = A(H * G_\sigma)(x)$	$P_\sigma(x) = \sqrt{2\pi}\sigma A G_\sigma(x)$

Tableau 1 : Fonctions caractéristiques de la transition et du pic en dimension 1.

A partir de ces expressions, on peut calculer les fonctions donnant l'amplitude de la transformée en ondelettes en fonction de l'échelle le long d'une ligne de maxima, pour chacune des deux singularités lissées. Nous appellerons ces fonctions « **fonctions de maxima d'ondelette** ». Elles seront notées MT_σ et MP_σ respectivement pour la transition et pour le pic. Les expressions obtenues (Fayolle, Ducottet et al. 1998) sont présentées dans le Tableau 2. Elles correspondent à la forme donnée dans l'équation (3), avec des valeurs particulières pour le paramètre K . Leur courbe représentative est donnée par la Figure 5.

Transition	Pic
$MT_\sigma(s) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{s}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}}$	$MP_\sigma(s) = \frac{A}{\sqrt{e}} \frac{s\sigma}{s^2 + \sigma^2}$

Tableau 2 : Fonction de maxima d'ondelettes pour la transition et le pic en dimension 1.

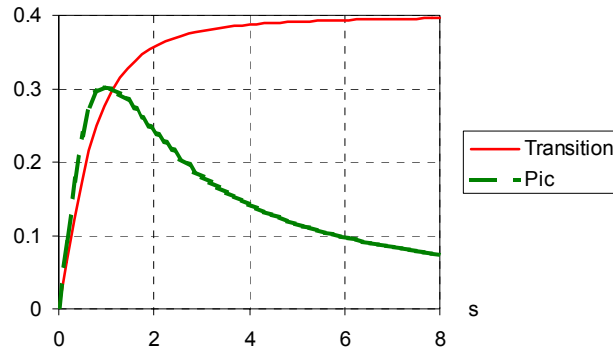


Figure 5 : Graphe représentatif des fonctions de maxima d'ondelettes en dimension 1.

On remarque sur ces deux fonctions que, lorsque le paramètre σ varie, les courbes se déduisent les unes des autres par changement d'échelle. Pour la transition, la fonction est strictement croissante et tend vers une fonction constante lorsque l'échelle est grande. Sa pente à l'origine est proportionnelle à s/σ . Pour le pic, la courbe présente un maximum pour $s = \sigma$.

2.2.2. Modèle en dimension 2

Le modèle que nous avons établi pour les signaux de dimension 1 peut s'adapter aux images, c'est à dire aux signaux de dimension 2. Dans ce cas, nous nous intéressons à trois modèles particuliers de singularités lissées : la transition d'exposant 0, le pic d'exposant -2 et la ligne d'exposant -1 . Comme en dimension 1, ces singularités sont caractérisées par une amplitude A et une taille de lissage σ .

Dans une image, une transition correspond à une variation rapide d'intensité dans une direction. On trouve ce type singularité lissée sur les bords des régions d'intensité constante, c'est à dire plus généralement sur le bord des objets. Le pic, quant à lui est l'extension bidimensionnelle du pic en dimension 1. En ce point, la fonction présente un maximum local. La ligne, correspond à une ligne de crête, c'est une extension du pic mais dans une seule direction. Dans la direction perpendiculaire, la fonction est constante (cf. Figure 6).

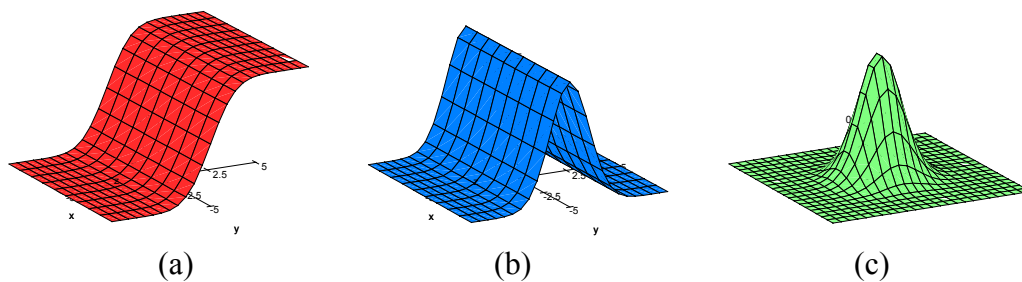


Figure 6 : Graphe représentant les trois types de singularités lissées en dimension 2. Transition (a), ligne (b) et pic (c).

Pour donner l'expression mathématique de ce modèle, il faut définir la gaussienne et la fonction de Heaviside en dimension 2. La gaussienne est définie par :

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + y^2)\right) \quad (4)$$

La fonction de Heaviside est définie par :

$$H(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, y \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{si } x > 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Les fonctions T_{σ} , P_{σ} et L_{σ} représentant respectivement la transition, le pic et la ligne, sont données dans le Tableau 3.

Transition	Pic	Ligne
$T_{\sigma}(x, y) = A(H * G_{\sigma})(x, y)$	$P_{\sigma}(x, y) = 2\pi\sigma^2 A \cdot G_{\sigma}(x, y)$	$L_{\sigma}(x, y) = 2\pi\sigma^2 A \cdot G_{\sigma}(x, 0)$

Tableau 3 : Fonctions caractéristiques de la transition, du pic et de la ligne en dimension 2.

Bien entendu, les singularités lissées qui sont identifiées sur les images ne sont pas toujours conformes aux définitions que l'on vient de donner. Par exemple, une transition ou une ligne peut être dans n'importe quelle direction ou peut être courbe. De plus, l'amplitude ou la taille de lissage peut varier le long de la transition ou de la ligne. En fait, il faut considérer que notre modèle est valable localement, sur des petites portions de singularités. Nous verrons par la suite comment **détecter et caractériser localement ces singularités lissées**.

De la même façon qu'en dimension 1, on peut analyser ces fonctions à partir de la transformation en ondelettes pour calculer leur fonction de maxima. Avant de donner les résultats obtenus, il nous faut d'abord préciser **comment calculer la transformée en ondelettes et les chaînes de maxima sur une image**.

En fait, le principe de calcul est celui que l'on utilise en détection de contours : l'ondelette mère possède deux composantes qui correspondent aux deux composantes du gradient de la fonction de lissage. On parle alors souvent d'ondelette GOG (Gradient of Gaussian). L'ondelette mère et la famille correspondante sont donc données par :

$$\vec{\psi}(x, y) = \begin{pmatrix} \psi^1(x, y) \\ \psi^2(x, y) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} x \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \\ y \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\vec{\psi}_s(x, y) = \frac{1}{s^2} \vec{\psi}\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right)$$

La transformée en ondelettes d'une image est obtenue en convoluant l'ondelette avec l'image. Ainsi, pour chaque valeur de l'échelle s , cette transformée est équivalente au gradient de l'image initiale après lissage de taille s . Lors de l'analyse d'une singularité sur une image, à chaque échelle de la transformée en ondelette, on observe des maxima locaux. Un maximum est détecté, selon l'approche de Canny (Canny 1986), comme le **maximum local du module du gradient dans la direction donnée par le vecteur gradient**, ce qui correspond au **maximum local du module de la transformée en ondelettes dans la direction de sa phase**.

Les maxima de la transformée en ondelettes correspondent en définitive **aux contours des objets** dans l'image lissée. Le modèle que nous avons présenté permet donc de définir **3 types particuliers de contours** : les transitions, les lignes et les pics qui sont caractérisés par deux paramètres représentant l'amplitude du contour et sa taille de lissage. **Une chaîne de maxima est obtenue en suivant un point particulier du contour dans les différentes versions lissées de l'image.**

On peut alors calculer (Ducottet, Fayolle et al. 2000), comme en dimension 1, les fonctions de maxima pour chaque type de singularité lissée. Les expressions obtenues sont présentées dans le Tableau 4.

Transition	Pic	Ligne
$MT_{\sigma}(s) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{s}{\sqrt{s^2 + \sigma^2}}$	$MP_{\sigma}(s) = \frac{A}{\sqrt{e}} \frac{s\sigma^2}{(s^2 + \sigma^2)^{3/2}}$	$ML_{\sigma}(s) = \frac{A}{\sqrt{e}} \frac{s\sigma}{s^2 + \sigma^2}$

Tableau 4 : Fonctions de maxima d'ondelette pour la transition, le pic et la ligne en dimension 2.

Comparée à la dimension 1, la fonction de maxima de la transition est identique, et celle de la ligne correspond au pic en dimension 1. Lorsque le paramètre σ varie, les fonctions se déduisent par un changement d'échelle. De même, on retrouve le comportement d'une singularité non lissée lorsque l'échelle devient grande. Les courbes représentatives de ces fonctions sont données par la Figure 7.

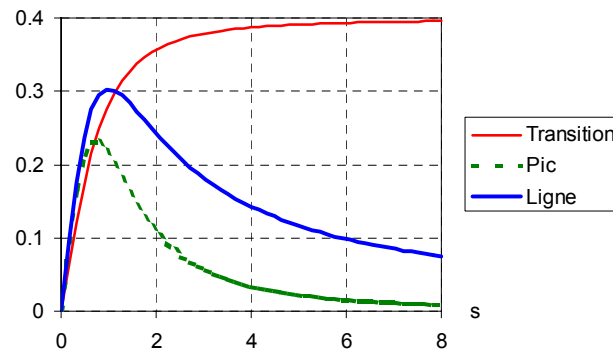


Figure 7 : Courbe représentative des fonctions de maxima en dimension 2.

2.2.3. Détection et caractérisation

Les fonctions de maxima que nous venons d'étudier peuvent être utilisées pour détecter et analyser les caractéristiques de singularités lissées dans un signal en dimension 1 ou en dimension 2.

L'étape de détection consiste à calculer la transformée en ondelettes du signal sur une gamme d'échelle, puis à détecter, à chaque échelle, les maxima locaux. On obtient alors le squelette de la transformée en ondelette. Du fait des propriétés du lissage Gaussien, le squelette

est composé de chaînes de maxima qui démarrent à la plus petite échelle, et se poursuivent aux grandes échelles après d'éventuelles fusions (Witkin 1983). Ainsi, à partir du squelette, on détecte le point de départ de chaque chaîne ainsi que la liste de ses suivants à travers les échelles.

L'étape de caractérisation porte ensuite sur chaque chaîne détectée. On commence par extraire la fonction de maxima de la chaîne, puis on la compare aux fonctions de maxima du modèle pour déterminer le type de la singularité lissée. Ensuite, les paramètres A et σ sont estimés à partir d'un ajustement avec la fonction correspondant au type identifié. En fait, on peut montrer qu'à partir de changements de variables appropriés, les ajustements avec les différentes fonctions de maxima se ramènent à des ajustements linéaires. Ainsi, la comparaison avec une fonction se fait en calculant le coefficient de corrélation de l'ajustement linéaire correspondant. Finalement, le type et les paramètres de la singularité sont obtenus simultanément en identifiant le meilleur ajustement.

D'un point de vue numérique, pour obtenir des fonctions de maxima suffisamment précises, et pour que le suivi à travers les échelles soit efficace, il faut bien choisir les **paramètres d'échantillonnage** de la transformation en ondelette. Dans les algorithmes que nous avons développés, l'ondelette est échantillonnée indépendamment de l'échelle, avec la même période d'échantillonnage spatiale que le signal. Le facteur d'échelle, quant à lui, est échantillonné linéairement avec une période moitié de la période spatiale. Ce type d'échantillonnage ne permettant pas d'utiliser facilement des algorithmes de type multi-résolution, nous calculons la transformée en ondelettes à partir de produits de convolution évalués à partir de transformées de Fourier rapide (FFT). Cette méthode revient à calculer un produit et une FFT par échelle car la transformée de Fourier discrète de l'ondelette de l'équation (5) peut être synthétisée directement.

2.3. Détection de points caractéristiques

La détection de points caractéristiques sur des images à niveaux de gris intervient en traitement d'images dans le domaine de la vision par ordinateur, lorsque l'on désire reconnaître ou suivre un objet dans une scène. Elle a notamment été utilisée pour localiser des objets en trois dimensions ou pour la reconnaissance de visages (Talluri and Aggarwal 1996; Yu, Jiang et al. 1996). Mais les applications les plus nombreuses concernent généralement l'étude du mouvement ou de la déformation d'objets. Dans ce cas, les points caractéristiques détectés doivent être suivis le long d'une séquence d'images (Sethi and Jain 1987; Shapiro and Brady 1992).

Les points retenus sont en général définis comme des points de forte courbure du contour des objets suivant la définition de Attneave (Attneave 1954). Deux types d'approches ont été proposées pour leur détection. La première est basée sur l'étude du contour discret des objets après une segmentation préalable (Rosenfeld and Johnston 1973; Teh and Chin 1989). La deuxième consiste à utiliser une quantité calculée directement sur l'image en niveaux de gris, comme par exemple la direction du gradient (Kitchen and Rosenfeld 1982). Dans ce cadre, plusieurs auteurs ont proposé des approches basées sur la transformation en ondelettes à partir soit d'ondelettes de Gabor (Zheng 1995), soit d'ondelettes dérivées de gaussienne (Chen, Lee et al. 1995).

La méthode que nous présentons dans ce paragraphe, permet de faire le lien entre points caractéristiques et analyse de singularités. Elle consiste à définir les points caractéristiques comme des **singularités lissées le long des contours**. La détection de ces points se fait donc en deux étapes. On commence d'abord à extraire de l'image en niveaux de gris un **signal de phase du gradient** le long de chaque contour. Ensuite, on **détecte les points caractéristiques** sur ce signal de phase à partir du modèle de singularités lissées en dimension 1 du paragraphe précédent.

2.3.1. Signal de phase du gradient

Un contour ouvert ou fermé est le plus souvent représenté à partir de la suite des directions qui permettent de le parcourir. Or, sur une trame, le nombre de directions que l'on considère est généralement limité à 4 ou à 8 en fonction de la définition adoptée pour un voisinage. D'autre part, cette définition suppose une segmentation préalable des contours. Ainsi, avec cette représentation, il n'est pas très facile de définir des points caractéristiques indépendants de l'orientation et de la taille des objets de la scène.

Une autre solution consiste à **utiliser le vecteur gradient** calculé le long du contour : ce vecteur représente la normale à la surface définie à partir de la fonction de gris de l'image. En projection sur le plan de l'image, il correspond à la normale au contour. On peut alors utiliser directement un détecteur de contour de type gradient de gaussienne (Canny 1986), à la fois pour détecter le contour et calculer la direction de sa normale. Comme nous l'avons précisé dans l'équation (5), ce détecteur est en fait une ondelette GOG.

Ainsi, chaque contour est représenté à partir d'un signal de phase du gradient calculé en deux étapes. La première étape est une **détection de contours** de type Canny qui revient à calculer le gradient et à détecter les maxima de ce gradient dans la direction du vecteur gradient. La deuxième étape est un **chaînage** des points détectés de manière à obtenir le signal de phase du gradient le long de chaque contour. La Figure 8 présente ces deux étapes sur un objet synthétique.

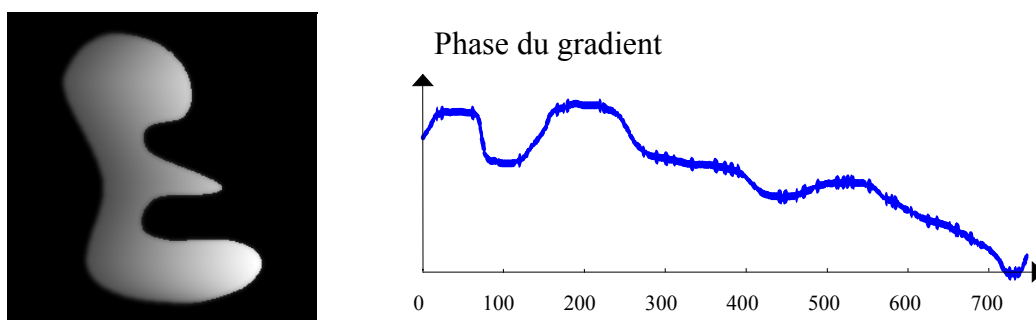


Figure 8 : Signal de phase du gradient calculé pour le cas d'un objet synthétique.

2.3.2. Extraction des points caractéristiques

D'après la définition proposée par Attneave, les points caractéristiques sont définis comme des points de forte courbure des contours. Or, un point où la courbure est localement forte se traduit par une variation rapide de la direction de la normale à ce contour, c'est à dire une variation rapide de son signal de phase. A partir du signal de phase du gradient, nous retenons

ainsi les **singularités lissées de type transition** comme points caractéristiques. En effet, les singularités lissées de type pic correspondent à des oscillations très locales qui sont généralement dues à du bruit le long du contour.

On remarque de plus que pour une transition, le quotient A/σ de l'amplitude A de la transition par sa taille de lissage σ représente une courbure. Parmi les points que l'on détecte, on peut donc sélectionner ceux pour lesquels la courbure locale est supérieure à un seuil. La Figure 9 présente les singularités détectées et la courbure correspondante.

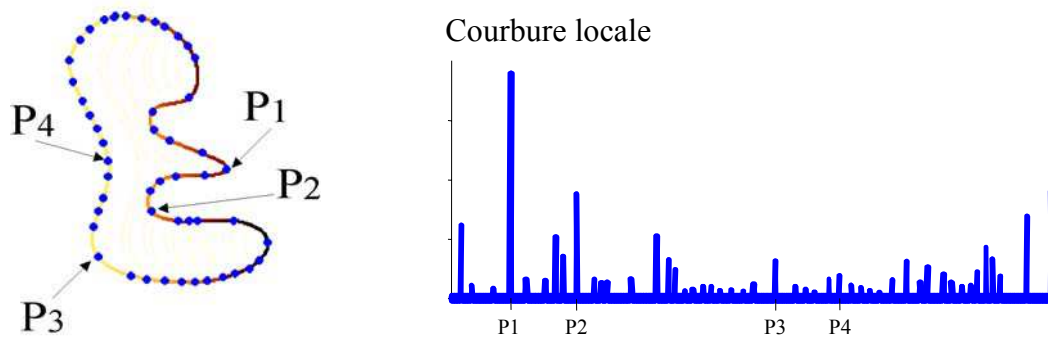


Figure 9 : Extraction des points caractéristiques et mesure de leur courbure locale en fonction de l'abscisse curviligne.

2.3.3. Résultats

Nous avons mené une étude sur la conservation des points détectés (Fayolle, Riou et al. 2000) en faisant varier des paramètres de prise de vue sur 2 images test. Les 5 paramètres retenus sont : le bruit, la rotation d'image, la source de lumière, le point de vue et le changement d'échelle. Il ressort que les points sont bien conservés vis à vis des 3 premiers paramètres, assez bien vis à vis du changement de point de vue et mal vis à vis du changement d'échelle. La Figure 10 présente quelques résultats obtenus en changeant les conditions de prise de vue.

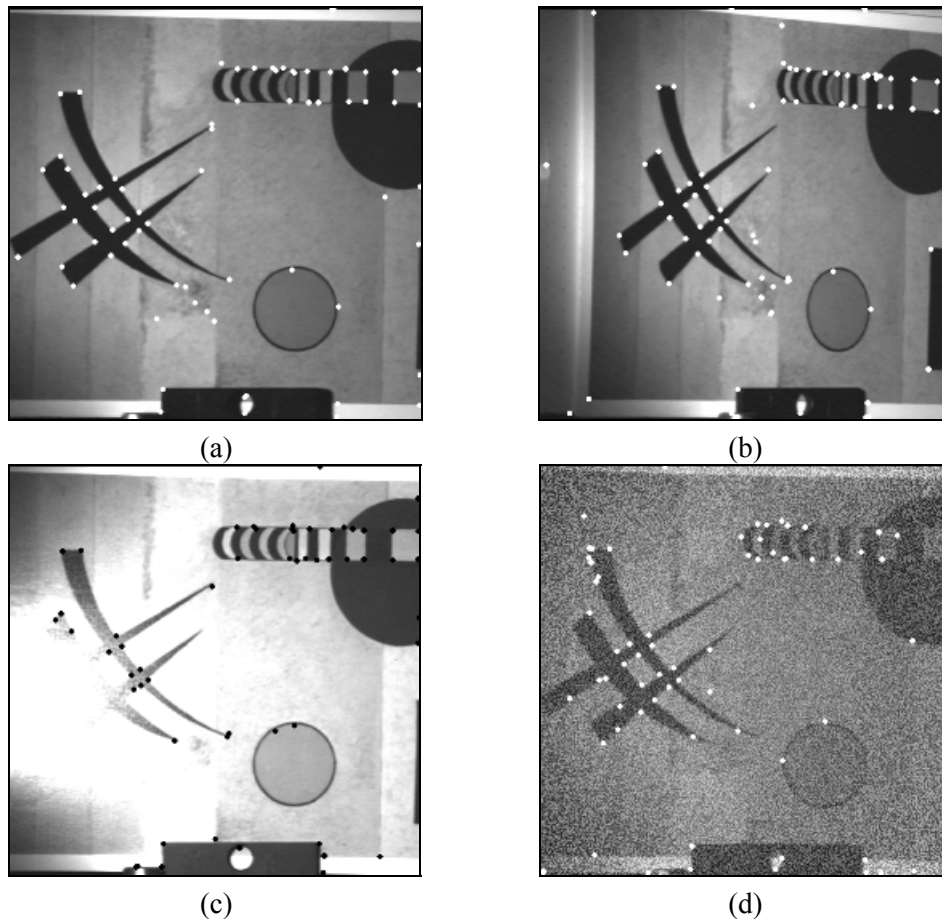


Figure 10 : Points caractéristiques obtenus sur « le signe » de Kandinsky. Image sans rotation de la caméra (a), image avec une rotation de 40° (b), image avec une source de lumière inclinée de 35° , image avec un bruit blanc pour un RSB de 0 DB.

D'autre part, la méthode peut aussi être utilisée pour l'étude du mouvement d'objets déformables en ajoutant une étape de suivi des points (Fayolle, Ducottet et al. 1998). Des résultats seront présentés au paragraphe 2.6.

2.4. Détection et caractérisation de contours

La détection de contours a donné lieu à un grand nombre de publications. En particulier Marr (Marr and Hildreth 1980) puis Canny (Canny 1986) ont étudié les propriétés des opérateurs détecteurs de contours. La plupart de ces détecteurs combinent un opérateur de dérivée première ou seconde à un opérateur de lissage. Le choix de la taille de l'opérateur de lissage résulte d'un compromis entre la sensibilité au bruit et la localisation : une grande taille permet d'être moins sensible au bruit mais au détriment de la localisation qui devient moins bonne qu'avec un filtre de petite taille (Lue and Jain 1989). Certains auteurs ont proposé des approches multi-échelle qui permettent d'adapter localement la taille du filtre en fonction des caractéristiques des contours (Bergholm 1987; Lindeberg 1998; Lindeberg 1999). Cette adaptation est basée sur une étude du comportement des contours dans l'espace des échelles (Witkin 1983). Dans le domaine des ondelettes, Mallat et Hwang (Mallat and Hwang 1992) ont présenté une méthode de détection et d'analyse de singularités dans les signaux et les images.

Dans ce paragraphe, nous proposons un **algorithme de détection multi-échelle et adaptatif** qui permet de mesurer les caractéristiques locales des contours, à partir de notre modèle de singularités lissées. Cet algorithme a pour fonction d'une part de **détecter et localiser** chaque contour à une échelle localement adaptée au degré de lissage de ce contour, et d'autre part, **d'identifier le type** de chaque point détecté (parmi les types transition, pic et ligne) et de **mesurer son amplitude et sa taille de lissage**.

Nous allons d'abord, présenter les principales étapes de l'algorithme en précisant les points délicats. Ensuite, après en avoir précisé les paramètres, nous indiquerons les résultats de son évaluation sur des images synthétiques et réelles.

2.4.1. Principales étapes de l'algorithme

L'algorithme est composé de 4 principales étapes. En plus des deux étapes de détection et de caractérisation présentées dans le paragraphe 2.2.3., il comporte deux étapes supplémentaires : une étape de localisation adaptative et une étape de sélection.

Détection des contours

On commence par calculer la transformée en ondelettes avec l'ondelette GOG pour des échelles allant de 1 à une échelle fixée s_{\max} par incrément de 0.5. Après détection des maxima locaux du module de la transformée dans la direction de la phase, on obtient, pour chaque échelle, un ensemble de points définissant les contours à cette échelle. A partir de cette représentation multi-échelle, on réalise le chaînage des maxima à travers les échelles.

Une chaîne de maxima est organisée selon une **structure d'arbre** allant des petites aux grandes échelles. Chaque maximum M de cette chaîne possède un descendant principal et éventuellement plusieurs descendants secondaires appartenant tous à l'échelle immédiatement supérieure. Le descendant principal est défini comme le plus proche maximum voisin de M dans l'échelle supérieure. Les descendants secondaires sont les maxima de l'échelle supérieure qui ont M comme plus proche voisin. D'autre part, si, à une échelle donnée, un maximum n'a pas été rattaché à une chaîne déjà définie, il est considéré comme étant la racine d'une nouvelle chaîne.

Ce type de chaînage permet de définir d'une part un **chemin principal** allant de la racine vers les grandes échelles, et des **ramifications secondaires** rattachées à ce chemin. Il permet d'autre part de garantir que chaque maximum appartient à au moins une chaîne (en pratique, il appartient souvent à plusieurs chaînes).

Caractérisation

Pour chaque chaîne de maxima, on associe une fonction de maxima en suivant le chemin principal. Par un ajustement linéaire, on détermine le type et les paramètres A et σ d'amplitude et de taille de lissage de la chaîne.

Localisation adaptative

L'algorithme doit fournir en résultat une image donnant la position des contours détectés avec leurs caractéristiques. Plutôt que de choisir une échelle particulière et repérer tous les maxima à cette échelle, nous adoptons une approche adaptative dans laquelle chaque maximum est repéré à une échelle spécifique s_l appelée échelle de localisation. L'étape de localisation

adaptative consiste donc à déterminer pour chaque chaîne de maxima, l'échelle s_l et les coordonnées des maxima de la chaîne dont l'échelle est égale à s_l . Il y a effectivement plusieurs maxima à l'échelle s_l du fait des ramifications secondaires de la chaîne.

L'échelle de localisation est choisie comme étant proportionnelle au paramètre σ mesuré pour la chaîne. Ainsi, plus un contour est lissé, plus il sera localisé à une grande échelle. Cette définition permet de **localiser efficacement les contours flous** qui, à petite échelle, sont plus sensibles au bruit. Le facteur de proportionnalité k_l , appelé facteur de localisation est fixé pour tous les contours en fonction du niveau de bruit et de la précision de localisation souhaitée.

Sélection des contours

Comme pour tous les détecteurs, parmi tous les contours détectés, il est en pratique utile de sélectionner ceux qui sont pertinents. La plupart du temps, la sélection est basée sur un seuillage hystérésis à deux seuils t_1 et t_2 . Elle revient à ne retenir que les points dont le gradient est supérieur à t_2 , qui appartiennent à un contour dont au moins un point est d'amplitude supérieure à t_1 (Canny 1986).

Dans le cadre de notre algorithme, nous disposons de la valeur du gradient sur toute une gamme d'échelle. Nous avons donc la possibilité de choisir une échelle s_{sel} à laquelle sera faite la sélection. Sachant que la plupart du temps, le bruit s'atténue fortement en fonction de l'échelle, le choix d'une échelle de sélection suffisamment grande permettra d'éliminer le bruit tout en conservant les contours des objets. Notons que le choix de l'échelle de détection n'influe pas sur la localisation des contours.

Ainsi, trois paramètres sont nécessaires à l'étape de sélection : l'échelle de sélection s_{sel} , et les deux seuils du seuillage par hystérésis t_1 et t_2 .

2.4.2. Paramètres de l'algorithme

A partir d'une image à analyser, l'algorithme fournit **en sortie trois images en niveau de gris** donnant respectivement le type (1, 2 ou 3), l'amplitude et la taille de lissage de chaque point de contour détecté. **Les paramètres d'entrée** sont les réels s_{max} , k_l , s_{sel} , t_1 et t_2 .

Le paramètre s_{max} permet de fixer l'échelle maximale de calcul de la transformée en ondelettes. Il est choisi en fonction du degré de lissage maximal que l'on veut mesurer dans l'image. Si l'on n'a pas de connaissance a priori sur cette image, on peut choisir une grande valeur, sachant que les valeurs généralement adoptées sont 4 pour des contours peu lissés, 8 pour des contours moyennement lissés et 16 pour des contours très lissés.

Le paramètre k_l est le facteur de localisation des contours. Il spécifie comment doit se faire l'adaptation d'échelle en fonction du degré de lissage σ mesuré. En pratique, sa valeur est choisie entre 0.5 et 2.

Les trois derniers paramètres s_{sel} , t_1 et t_2 permettent respectivement de fixer l'échelle à laquelle la sélection des contours devra s'opérer (en pratique entre 2 et 16) et les seuils du seuillage hystérésis.

2.4.3. Résultats

Notre algorithme a été évalué sur des images de synthèse et sur des images réelles. Nous présentons dans ce paragraphe, les résultats des tests sur les images de synthèse. Au paragraphe

2.6., nous verrons deux applications à des images réelles. Ces résultats sont tirés d'une étude présentée dans (Barat, Ducottet et al. 2003a).

Une série d'images de test contenant des contours de type transition, ligne et pic avec différents degrés de lissage a d'abord été définie. Nous avons alors pu vérifier que les contours correspondants sont correctement détectés par l'algorithme, que leur type est correctement identifié, et que leurs paramètres A et σ sont mesurés avec une erreur inférieure à 5%. La Figure 11 présente les images résultats obtenues pour une analyse avec ($s_{\max} = 8, k_l = 1$) sur 4 images de singularités lissées avec des tailles de filtres de 1, 2, 3 et 4.

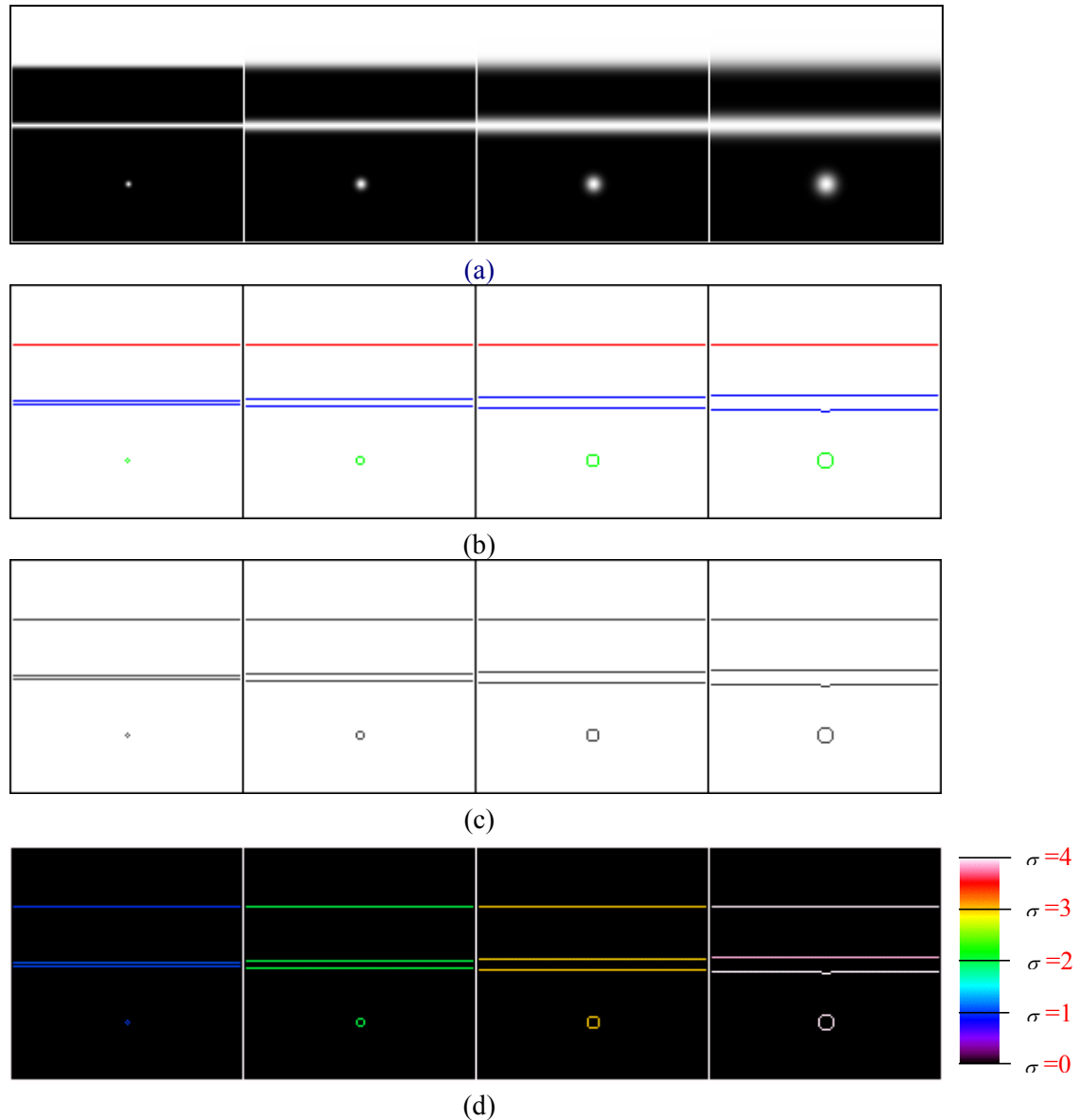


Figure 11 : Résultat de l'analyse sur les images synthétiques de contours lissés pour σ valant 1, 2, 3 et 4 avec les paramètres ($s_{\max} = 8, k_l = 1$). Images initiales des contours lissés de taille 128x128 (a). Images donnant le type des frontières (rouge=transition, bleu=ligne, vert=pic) (b), images donnant l'amplitude (c) images donnant la taille de lissage (fausses couleurs) (d).

L'influence du bruit a ensuite été évaluée en ajoutant un bruit blanc gaussien sur l'image synthétique lissée avec $\sigma = 2$, en faisant varier le rapport signal à bruit de -2 à 10 DB (Figure 12a), sachant que si η est l'écart type du bruit, ce rapport SNR est défini en fonction de l'amplitude A des frontières par :

$$SNR = 20 \log_{10} \left(\frac{A}{2\eta} \right)$$

L'analyse des contours avec les paramètres $(s_{\max} = 8, k_l = 1.5)$ permet de détecter les contours théoriques initiaux, ainsi que des contours dus au bruit (Figure 12b). En appliquant un seuillage hystérésis à l'échelle 2, il est possible de sélectionner les contours des objets (Figure 12c). L'analyse statistique de ces résultats permet de montrer que les contours théoriques initiaux sont bien identifiés à environ 80% pour la transition et la ligne quelque soit le niveau de bruit. Par contre, pour le pic, l'identification n'est fiable qu'à partir d'un SNR supérieur à 6 DB. D'autre part, les valeurs de A et de σ mesurées sont précises à 15% près, quelque soit le niveau de bruit pour la transition et la ligne et lorsque le SNR est supérieur à 6 DB pour le pic.

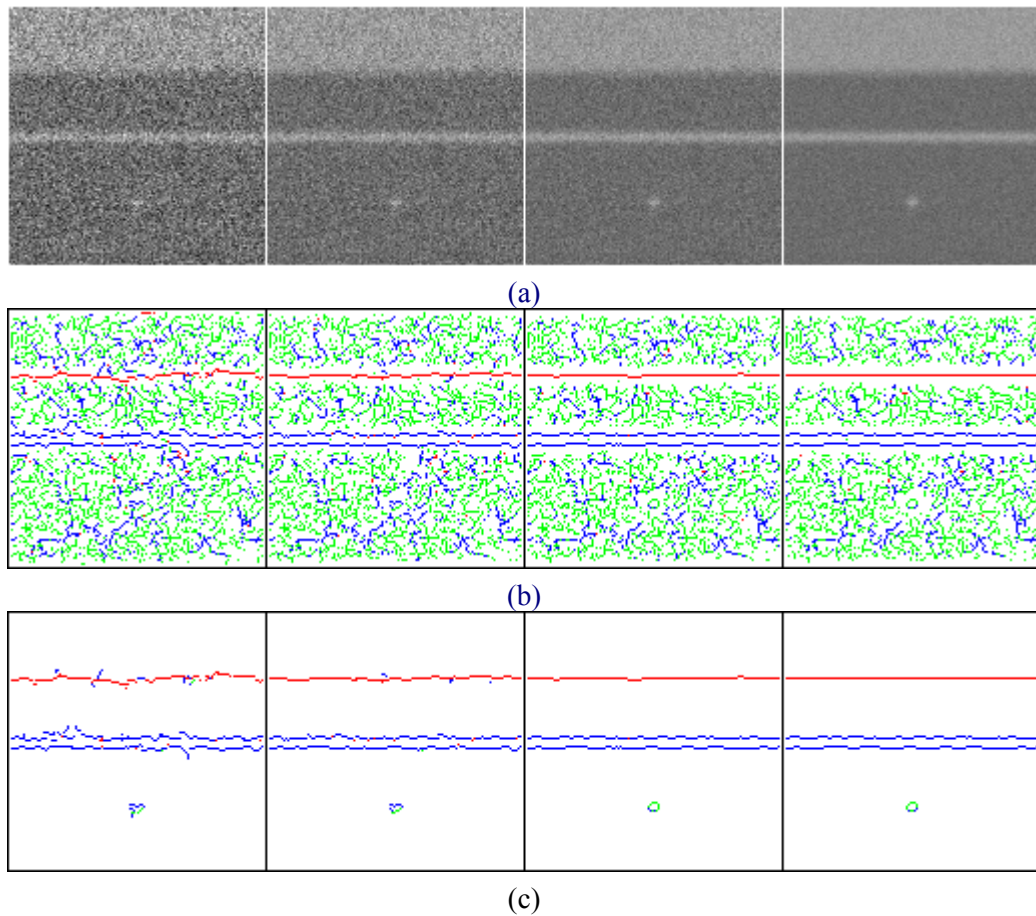


Figure 12 : Détection des contours sur l'image bruitée : images sources obtenues en ajoutant du bruit à l'image des contours lissés à l'échelle 2 pour un RSB de -2 , 2 , 6 et 10 (a), images résultats donnant le type des contours détectés pour les paramètres $(s_{\max} = 8, k_l = 1.5)$ (b), images résultat après sélection des contours pour $(s_{\text{sel}} = 2, t_1 = 23, t_2 = 20)$ (c).

Une étude sur **l'influence du paramètre de localisation** a été également menée. Pour un même rapport signal sur bruit de 8 DB, nous avons détecté les contours de singularités lissées avec des valeurs de σ de 1, 2, 3 et 4. Nous avons alors pu vérifier que pour une valeur de k_l de 1.5, les contours sont bien localisés quelque soit la valeur de σ tout en évitant une fragmentation pour les forts lissages. Ce résultat n'est pas possible à obtenir à partir d'un filtrage non adaptatif tel que le filtrage de Canny par exemple.

Finalement, nous avons vérifié que ces résultats s'appliquent aussi **lorsque les contours ne sont pas rectilignes**, en traitant une image de synthèse présentant des contours incurvés (Figure 13).

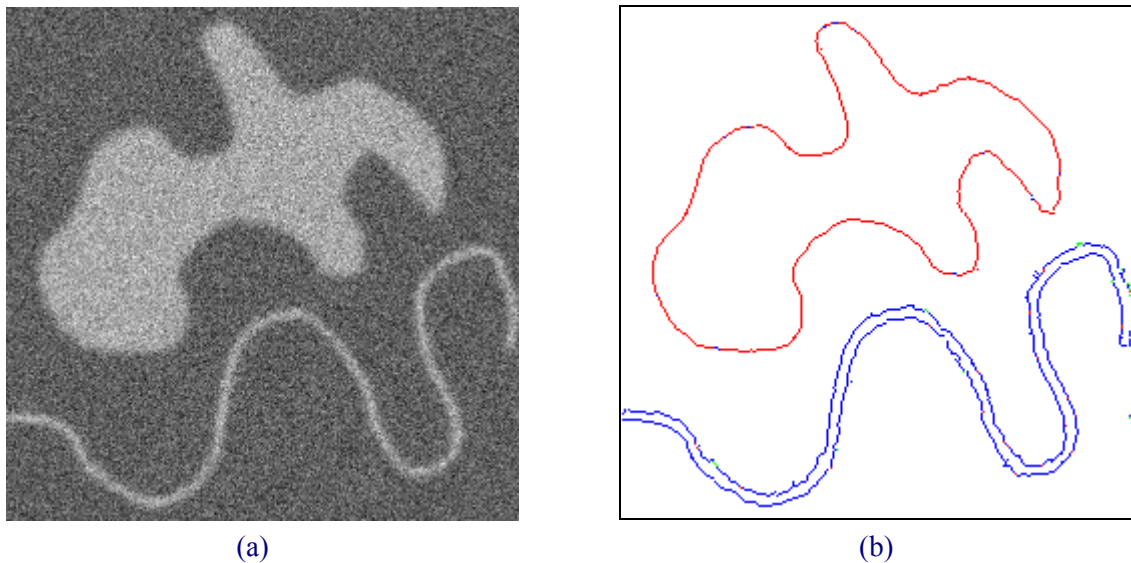


Figure 13 : Image présentant des contours courbes de type transition et ligne avec une taille de lissage de 2, et un bruit blanc donnant un RSB de 4db (a), détection obtenue avec les paramètres ($s_{Max} = 8, k_l = 1.5, s_{Sel} = 2, t_1 = 20, t_2 = 10$) (b).

2.5. Vers une approche morphologique

La transformée en ondelettes peut **s'interpréter en terme de corrélation**. En effet, si l'on regarde l'équation (1), on peut dire que pour une échelle fixée, la transformée en ondelettes est le produit de corrélation entre la fonction analysée et la fonction symétrique de l'ondelette. Les maxima locaux de la transformée correspondent donc à des pics de corrélation c'est à dire à des **points de bonne correspondance** entre la fonction et l'ondelette. Ainsi, l'analyse d'une singularité lissée revient à l'étude de l'amplitude du pic de corrélation en fonction de l'échelle de l'ondelette.

Cette interprétation peut nous amener à étudier une forme d'ondelette mieux adaptée à la singularité lissée recherchée. Pour les singularités lissées de type pic ou ligne, une ondelette de type laplacien de gaussienne est d'ailleurs bien adaptée. Ce type d'ondelette a une forme beaucoup plus proche de ces singularités lissées, et présente l'avantage de ne produire qu'un maximum positif localisé au sommet de la ligne ou du pic. En fait, les résultats développés précédemment s'adaptent facilement à ce cas et plus généralement au cas d'une ondelette dérivée d'ordre quelconque d'une fonction de lissage (Mallat and Hwang 1992).

Une seconde voie plus originale consiste à rechercher d'autres moyens de comparer la fonction analysée à l'ondelette, notamment en utilisant des **outils morphologiques**. Ce type d'outil a d'ailleurs déjà été utilisé dans le domaine des ondelettes dans le cadre du lifting scheme dans les travaux de Goutsias et Heijmans (Goutsias and Heijmans 2000; Heijmans and Goutsias 2000). Ici, l'objectif n'était pas la détection de singularités mais plutôt d'obtenir une transformation réversible sans redondance s'exprimant à l'aide des opérateurs de base de la morphologie mathématique.

Dans ce paragraphe, nous présentons les premiers résultats sur la définition de deux **opérateurs morphologiques pour la mise en correspondance de forme** dans les images à niveaux de gris (Barat, Ducottet et al. 2003c). Ces opérateurs permettent de rechercher, dans une image, toutes les instances d'une forme définie à l'avance, en s'inspirant du modèle du **palpage mécanique**. Nous présentons d'abord ces deux opérateurs puis nous indiquons comment ils peuvent être utilisés pour la détection de singularités de type pic ou ligne.

2.5.1. *Opérateurs de palpage morphologique*

Le palpage mécanique sert à l'analyse de surface. Il consiste à déplacer un palpeur horizontalement au contact de la surface et à enregistrer son mouvement vertical. Il est possible de transposer ce principe à l'analyse d'image puisqu'en effet, une image à niveaux de gris peut être vue comme une surface 3D, et le mécanisme de palpage de cette surface peut être modélisé par les opérateurs de morphologie mathématique que sont l'érosion et la dilatation (Serra 1982).

L'idée des deux opérateurs de palpage est de détecter un objet en analysant la position relative de deux palpeurs amenés au contact de la surface, simultanément par dessus et par dessous. Le premier opérateur, dénommé SOMP (Single Object Matching Using Probing), permet de détecter toutes les occurrences d'un même motif dans une image. Comme la transformée Hit-Or-Miss à niveaux de gris proposée par Schafer et Khosravi (Khosravi and Schafer 1996), il utilise deux éléments structurants identiques. Le second, appelé MOMP (Multiple Objects Matching using Probing) peut être vu comme une extension de SOMP. Son originalité est de permettre la détection de plusieurs motifs de différentes formes ou tailles avec une unique paire de palpeurs adaptés. Cette fois, les deux palpeurs sont distincts et forment un gabarit dans lequel doivent tenir les objets à localiser.

L'opérateur SOMP

Cet opérateur permet de trouver dans une image à niveaux de gris f toutes les positions de correspondance avec un motif t de forme connue. Il consiste à caler virtuellement l'image entre deux fonctions de référence identiques définissant le modèle recherché. Ces fonctions, dont le support spatial est plus petit que celui de l'image, peuvent se déplacer verticalement au dessus de leur point de centrage. L'une est amenée au contact de la surface par dessous pendant que l'autre vient se positionner au contact par dessus. Comme l'opération est répétée pour toutes les positions possibles du modèle sur le domaine, cela revient à faire glisser les deux fonctions de référence sur l'image simultanément par dessus et par dessous. Elles se comportent donc comme des palpeurs inférieurs et supérieurs. Plus la zone de l'image étudiée ressemble au modèle, plus l'écart entre les palpeurs est petit. Cette différence entre les positions verticales des deux palpeurs est le résultat de l'opérateur *SOMP* (Figure 14).

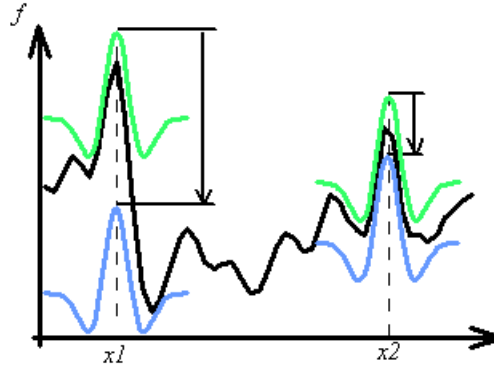


Figure 14 : Principe de l'opérateur SOMP

Mathématiquement, nous associons une image à niveaux de gris à sa fonction représentative f , définie sur un support $D \in \mathbb{R}^2$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Nous notons t la fonction de référence, définie sur son support T et f_T la restriction de f à T . L'opérateur *SOMP* est égal à la différence des résultats des opérations d'anti-dilatation et d'érosion de l'image f par le modèle t , notées respectivement $\delta_{-t}(f)$ et $\varepsilon_t(f)$ (Sternberg 1986). Il s'écrit donc :

$$SOMP_t(f_T) = \delta_{-t}(f_T) - \varepsilon_t(f_T)$$

$$\text{avec } \delta_{-t}(f_T)(x) = \max_{y \in T} (f(x+y) - t(y))$$

$$\text{et } \varepsilon_t(f_T)(x) = \min_{y \in T} (f(x+y) - t(y))$$

Cet opérateur possède toutes les propriétés d'une métrique. Il se présente donc comme **une alternative à la corrélation**. Deux propriétés le caractérisent : son invariance à une dérive d'éclairement dans l'image étudiée, et sa mise en oeuvre efficace (Barat, Ducottet et al. 2003c).

L'opérateur MOMP

Dans certaines applications, les objets à détecter peuvent être de formes différentes, des instances de tailles variables ou des représentants bruités d'un même modèle. Bien sûr on peut définir toutes les paires d'éléments structurants adaptées à la détection de chacun des objets, puis itérer l'opérateur SOMP avec chacune des combinaisons. Or, si le nombre de motifs est important, cette approche est très coûteuse en temps de calcul. Pour réduire ces temps de calculs, on introduit l'opérateur MOMP. Défini comme l'opérateur SOMP, il utilise une combinaison de deux fonctions de référence distinctes, notées t_{inf} et t_{sup} , permettant de détecter tous les objets recherchés t_i en une seule fois. L'opérateur MOMP s'exprime donc par :

$$MOMP_{(t_{inf}, t_{sup})}(f) = \delta_{-t_{sup}}(f) - \varepsilon_{t_{inf}}(f)$$

Les fonctions t_{inf} et t_{sup} sont construites de manière à former un gabarit dans lequel doivent tenir les graphes de tous les motifs recherchés. L'écart A entre t_{inf} et t_{sup} à la position de centrage sert de critère de décision. L'opérateur *MOMP* fournit l'écart entre les palpeurs en chaque point de centrage. Un objet est détecté lorsque ce résultat est inférieur à A (Figure 15).

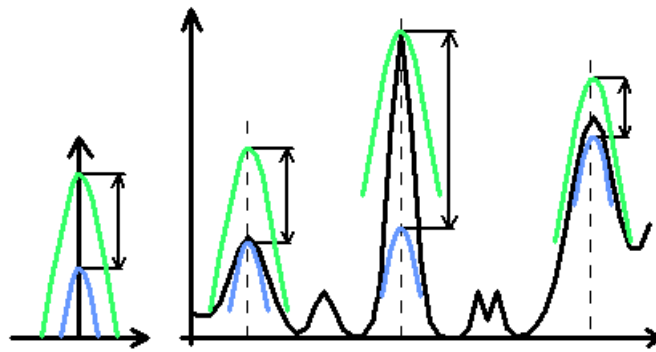


Figure 15 : Opérateur MOMP. Principe de la détection d'objets tenant dans le gabarit de gauche

2.5.2. Application à la détection de pics et de lignes

Les applications de ces deux opérateurs **dépassent le cadre de la détection de singularités**. En effet, ils peuvent être utilisés dans tous les problèmes de mise en correspondance de forme en niveaux de gris, à condition de pouvoir définir la ou les fonctions de référence pour le palpement. L'opérateur SOMP est bien adapté au problème de recalage ou de recherche de motif. Dans ce cas, la fonction de palpement peut directement être extraite de l'image. Nous avons pu notamment l'appliquer à la recherche de marques repères sur une image radiographique (Barat, Ducottet et al. 2003d).

Pour la détection de singularités lissées, l'opérateur MOMP est mieux adapté car il permet de définir un modèle mathématique de l'objet recherché, à partir de fonctions élémentaires. Nous présentons ainsi des applications à la détection de pics et de lignes.

Détection de pics

Le principe est d'utiliser **deux éléments structurants cylindriques** comme palpeurs. Ces palpeurs permettent de sélectionner des pics tous caractérisés par une même hauteur minimum A et une largeur comprise dans un intervalle donné. Le principe de la détection de pics avec de tels éléments structurants est illustré Figure 16. Remarquons que cette définition du pic est plus générale que celle utilisant la gaussienne (Tableau 3), puisqu'elle ne se limite pas à une forme donnée, mais fixe un gabarit dans lequel doit tenir le pic. Par contre, contrairement aux ondelettes gradient ou laplacien de gaussienne, l'opérateur ainsi défini **ne détecte pas les objets de type transition et ligne** puisque dans ces cas le palpeur supérieur ne peut pas descendre suffisamment par dessus.

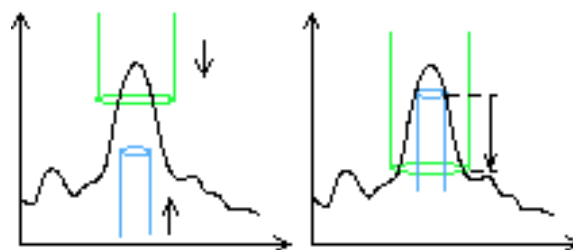


Figure 16 : Détection de pics par transformée MOMP

Nous avons appliqué cet algorithme à la **segmentation de particules** sur des images obtenues par holographie numérique. Comme nous le verrons au paragraphe 3., l'holographie numérique permet d'enregistrer sur un capteur CCD l'hologramme d'un volume de particules. Lors de l'analyse de cet hologramme, chaque plan restitué contient deux types d'objets : des pics correspondants aux particules focalisées et des systèmes d'anneaux (motifs de diffraction) correspondants aux particules non-focalisées. Pour ces dernières, la taille du système d'anneaux est fonction de la distance au plan de focalisation. Les Figure 17(a) et Figure 17(b) montrent justement les mêmes particules restituées dans deux plans différents, à 41 mm et 44 mm du capteur. Les particules situées à la même distance du plan de restitution apparaissent donc avec le même motif de diffraction.

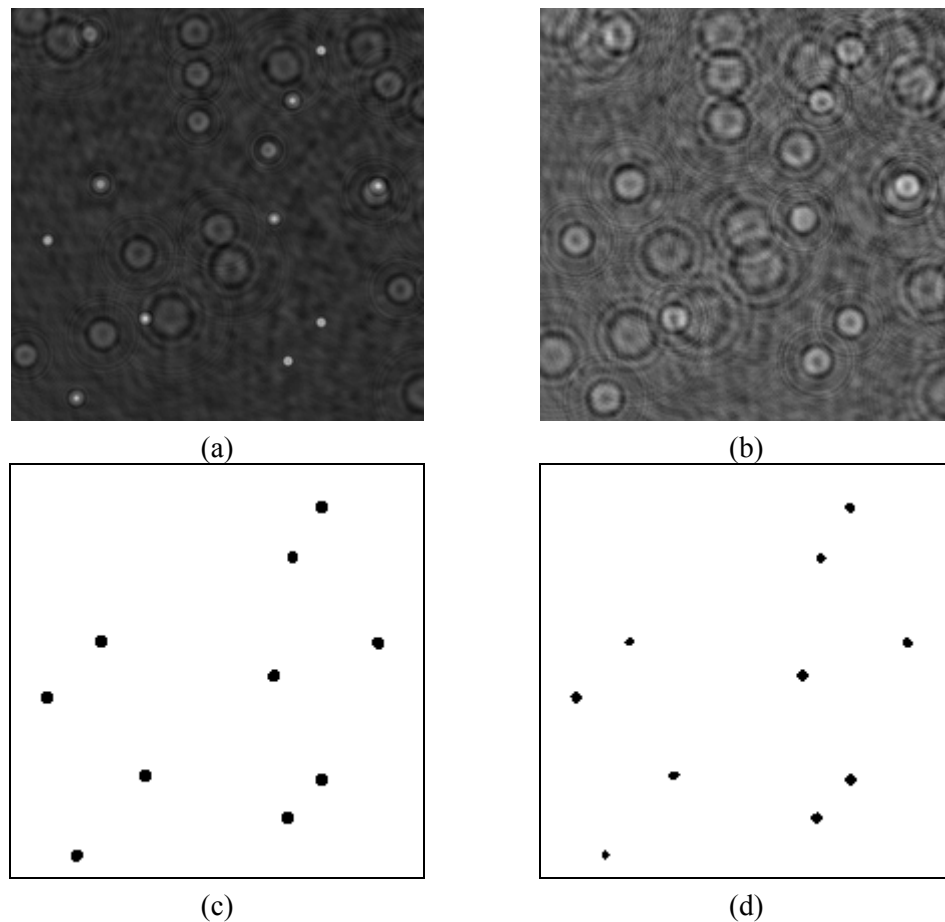


Figure 17 : Plans restitués à 41mm (a) et 44mm (b) du capteur. Résultats de segmentation des mêmes particules focalisées(c) , puis défocalisées (d).

La transformée MOMP nous permet de sélectionner toutes les particules présentant le même motif. C'est le choix des diamètres des rayons des cylindres qui détermine le motif à repérer. Nous pouvons détecter aussi bien les particules focalisées, que celles qui présentent un système d'anneaux de taille donnée (Figure 18 (a) et (b)).

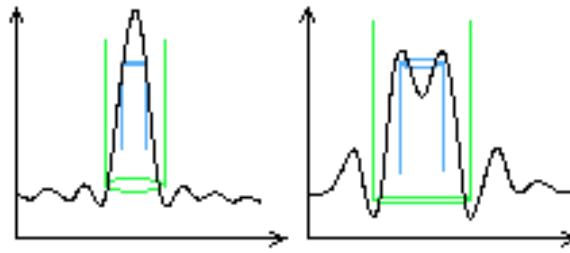


Figure 18 : Palpage du profil d'une particule focalisée (a) et défocalisée (b).

Détection de lignes

Pour la détection de lignes, nous utilisons un modèle composé de trois éléments structurants parallèles qui sont des **segments plans orientés** dans la direction de la ligne. Le palpeur supérieur est composé des deux segments venant se caler par dessus et de part et d'autre de la ligne alors que le palpeur inférieur est composé d'un seul segment destiné à se caler sous la ligne (Figure 19). Ce modèle est donc décrit par les paramètres suivants :

- la longueur des segments qui fixe la longueur minimale de la ligne,
- l'épaisseur du segment inférieur qui fixe l'épaisseur minimale de la ligne,
- l'épaisseur des segments supérieurs qui fixe la distance minimale entre la ligne et un autre objet de l'image,
- la distance séparant les deux segments supérieurs qui fixe l'épaisseur maximale de la ligne, ou son paramètre de « lissage » : plus la distance est petite et plus la ligne est nette,
- l'amplitude de croisement entre les palpeurs inférieurs et supérieurs qui fixe la hauteur minimale de la ligne,
- l'orientation des segments qui fixe l'orientation locale de la ligne.

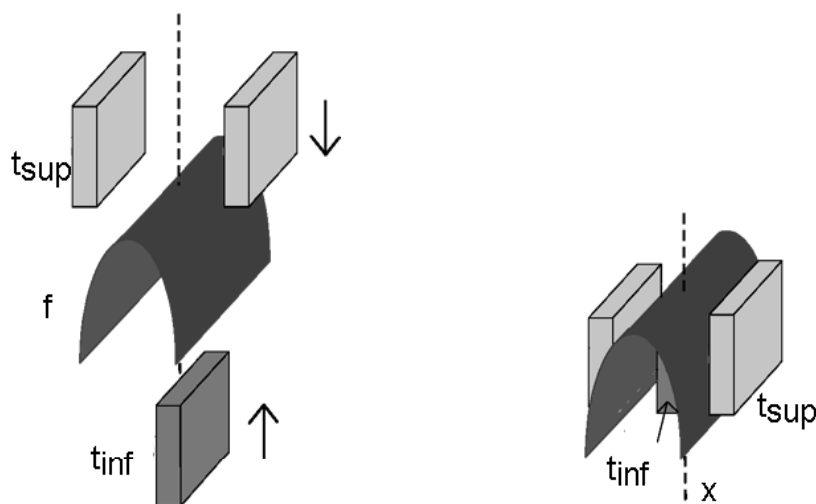


Figure 19 : Eléments structurants pour la détection de lignes.

Nous avons mis au point un **algorithme adaptatif** permettant d'ajuster localement et automatiquement les paramètres de longueur et d'orientation des segments (Barat, Ducottet et al. 2003b). Cet algorithme utilise une extension de la méthode de Bresenham (Bresenham 1965)

pour les opérateurs morphologiques directionnels (Soille, Breen et al. 1996). Il se compose de **trois étapes** qui sont : la recherche d'un point initial, le changement de taille et la propagation. **Dans la première étape**, on recherche un point initial correspondant à un modèle de longueur minimale orienté dans n'importe quelle direction. **La deuxième étape** consiste ensuite à augmenter le paramètre de longueur en réajustant la direction. Dans **l'étape de propagation**, on cherche finalement à prolonger la ligne détectée le plus loin possible, à partir du point initial, en adaptant les paramètres d'orientation et de longueur. Du fait de ces adaptations, **la ligne détectée peut être courbe** ou même présenter des changements de courbure. Les trois étapes précédentes sont répétées jusqu'à avoir détecté toutes les lignes de l'image.

Cet algorithme a été appliqué sur des images d'angiogrammes et de radiographies (Barat, Ducottet et al. 2003b). Nous présentons ici la segmentation des vaisseaux sanguins obtenue sur une image d'angiogramme extraite de la base du GDR ISIS (Figure 20 (a)). Les résultats concernant les radiographies seront présentés au paragraphe 2.6.. Sur la Figure 20(b), on remarque que les vaisseaux sont bien détectés malgré le fond non uniforme et le bruit. Après amincissement et seuillage (Figure 20 (c)), le résultat est meilleur que celui obtenu par l'opérateur chapeau haut de forme (Serra 1982)(Figure 20 (d)) ou laplacien de gaussienne (Figure 20 (e)).

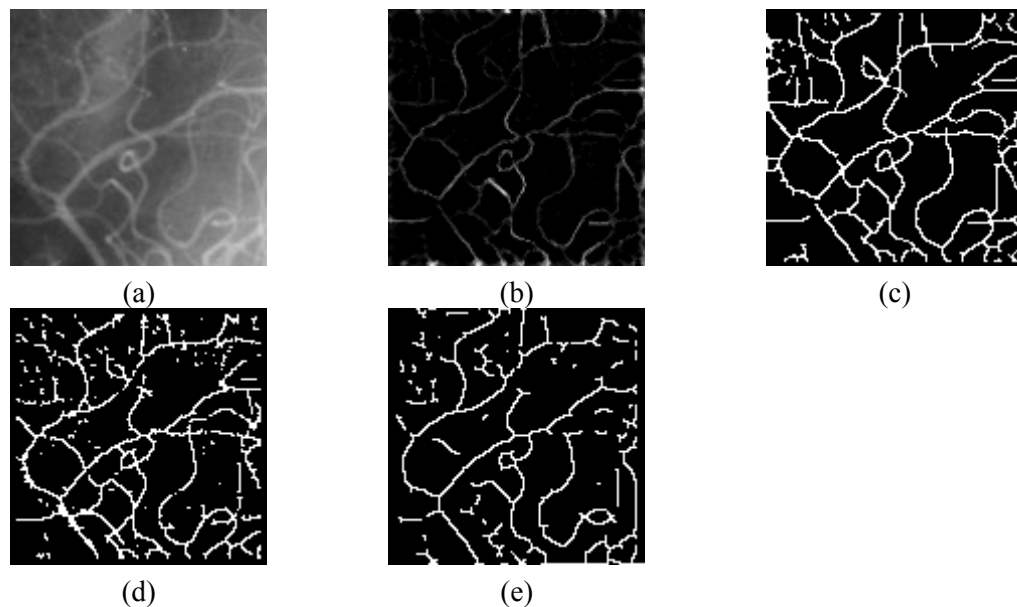


Figure 20 : Détection de vaisseaux sanguins sur une image d'angiogramme (a). Résultat de l'opérateur de détection de lignes (b), résultat après amincissement et seuillage (c), résultat obtenu à partir de l'opérateur chapeau haut de forme (d), résultat obtenu par laplacien de gaussienne (e).

2.6. Applications

Nous avons pu appliquer les algorithmes présentés dans les paragraphes précédents à plusieurs problèmes de traitement d'images relevant du domaine de la mécanique des fluides ou du domaine biomédical. Nous exposons d'abord une application de l'algorithme de détection de points caractéristiques à l'étude de la diffusion turbulente. Ensuite, dans un contexte plus

industriel, nous donnons les résultats de détection et caractérisation de contours de jets issus d'injecteurs diesel. La dernière application concerne finalement la segmentation de vertèbres pour la chirurgie assistée par ordinateur. Nous donnons des résultats de détection de contours par ondelettes et de détection de lignes par approche morphologique.

2.6.1. Etude de la diffusion turbulente

Le processus de diffusion intervient dans de nombreux phénomènes physiques. C'est notamment le cas en mécanique des fluides dans les problèmes de dispersion de polluants dans l'atmosphère ou dans les problèmes de mélange au cours de réactions chimiques. Dans ces situations, il est nécessaire d'étudier comment un certain composé, injecté localement avec une forte concentration, se disperse dans un écoulement. Si le composé injecté a des propriétés optiques différentes de l'écoulement, ou bien si l'on peut lui ajouter des marqueurs qui ont ces propriétés, il pourra être visualisé sous la forme d'un nuage. L'étude de la diffusion pourra être menée en évaluant la déformation de ce nuage le long d'une séquence d'images. A titre d'exemple, la Figure 21 présente l'évolution d'un colorant dans un écoulement turbulent généré par le déplacement d'une grille.

Pour évaluer la déformation d'un objet non rigide comme un nuage de particules, on peut adopter une approche dite par « tracking », c'est à dire que l'on suit l'évolution d'un ensemble de points caractéristiques de cet objet le long de la séquence. A partir des points caractéristiques définis dans le paragraphe 2.3., nous avons ajouté une étape de mise en correspondance basée sur le gradient en ces points (Fayolle, Ducottet et al. 1996). A partir d'un point caractéristique P_1 détecté sur une image, nous recherchons, dans un voisinage de ce point, le point caractéristique P_2 de gradient le plus proche dans l'image suivante. L'association est ensuite validée si, suivant le même principe, P_1 est le plus proche voisin de P_2 .

Cette approche permet d'obtenir des résultats visuellement satisfaisants (cf. Figure 21). Une étude statistique serait nécessaire pour une validation définitive.

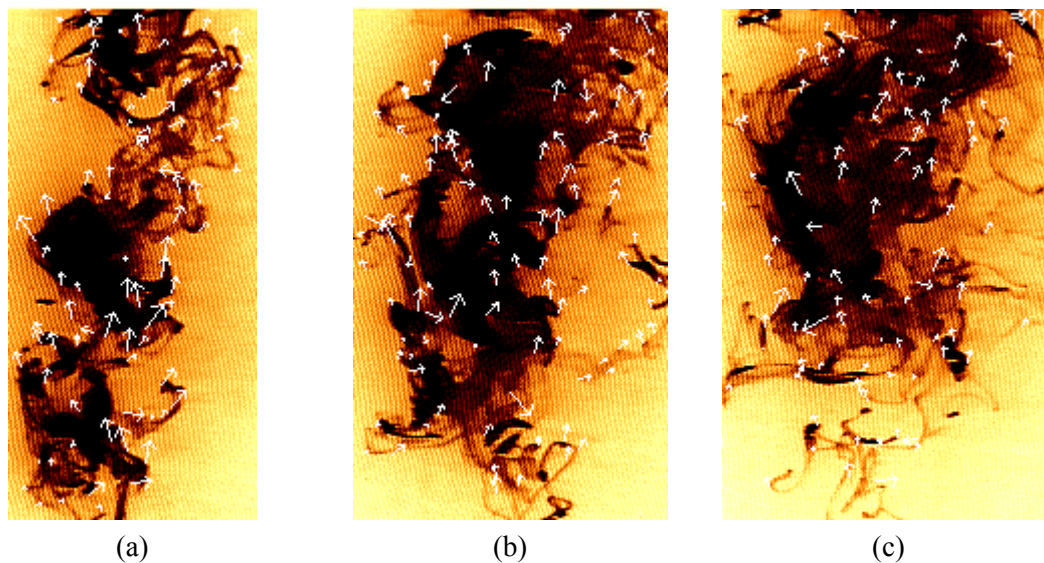


Figure 21 : Résultat de détection et de suivi de points caractéristiques sur la diffusion d'un nuage de particules dans l'écoulement turbulent généré par le passage d'une grille. $t=8s$ (a), $t=12s$ (b), $t=16s$ (c).

2.6.2. Segmentation de jets diesels

Nous considérons ici une application issue de l'industrie automobile : l'étude de la morphologie des jets issus d'injecteur diesel common-rail. Cette étude est menée en collaboration avec la société EFS à Montagny. Dans ce cadre, il s'agit d'étudier l'évolution de jets de gouttelettes d'huile produits par des injecteurs multi-trous. Les images sont acquises avec un système de vidéo instantanée, dans l'axe de l'injecteur.

Sur ces images qui montrent l'évolution des 5 jets (Figure 22 (a)), on constate que les contours apparaissent plus ou moins diffus en fonction de leur distance au point d'injection (situé au centre). Proche du point d'injection, les contours sont peu diffus, alors que loin de ce point ils sont beaucoup plus diffus. Cette propriété rend difficile la segmentation de tous les contours à la même échelle : si cette échelle est grande, la localisation proche de l'injecteur sera moins bonne, alors que si l'échelle est petite, on ne pourra pas segmenter correctement les parties diffuses. C'est le cas par exemple, avec un filtre de Canny à une échelle de 2 pixels (Figure 22 (b)).

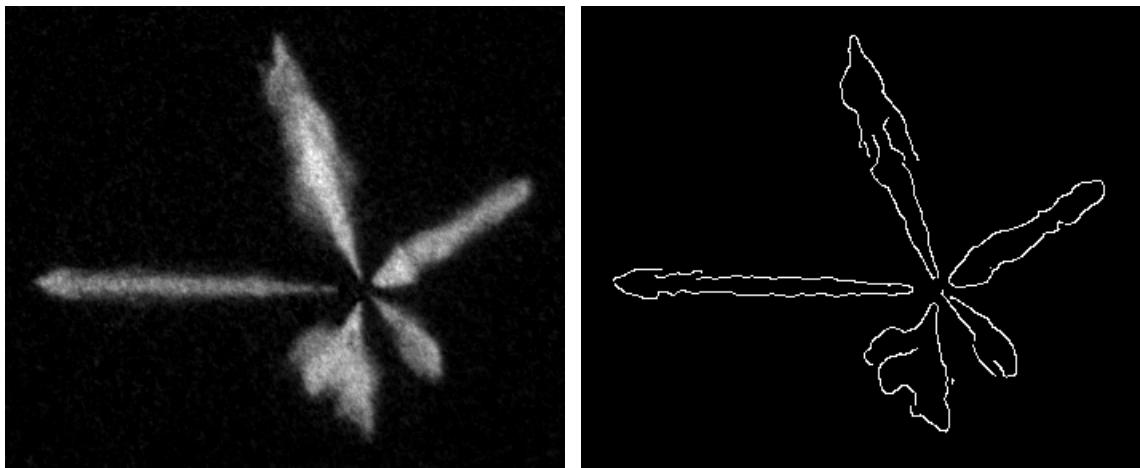


Figure 22 : Image des 5 jets issus d'un injecteur diesel multi-trous (résolution 350x288 pixels) et segmentation réalisée à partir d'un filtre de Canny à l'échelle 2.

Avec la méthode de détection par transformée en ondelettes, l'échelle est adaptée en chaque point en fonction du degré de flou des contours. Le résultat obtenu Figure 23 a été calculé avec les paramètres $(s_{Max}=16, k_l=1, s_{Sel}=2, t_1=23, t_2=0)$. Nous avons représenté les contours détectés avec une échelle de couleur donnant le degré de lissage calculé en chaque point. On note que les parties nettes et diffuses sont correctement segmentées en conservant une bonne localisation dans les parties nettes. D'autre part, en comparant la segmentation obtenue avec l'image originale de la Figure 22(a), on constate que l'échelle de lissage calculée correspond bien à une mesure du degré de diffusion des contours.

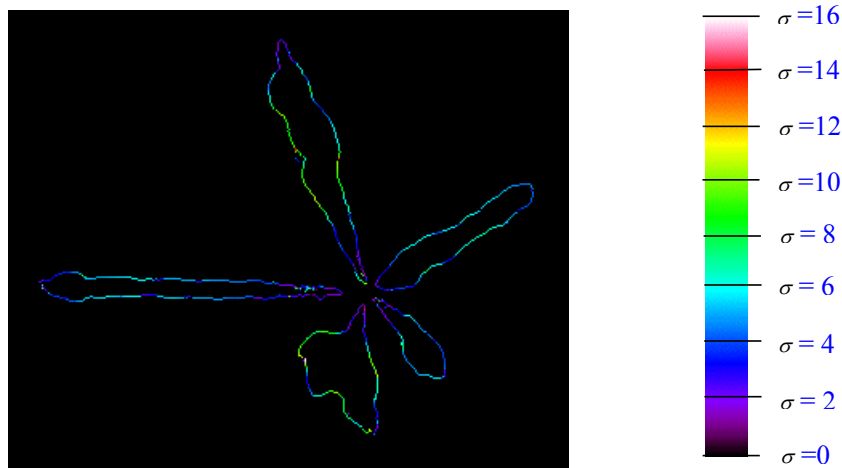


Figure 23 : Segmentation par transformée en ondelettes avec les paramètres ($s_{Max} = 16, k_l = 1, s_{Sel} = 2, t_1 = 23, t_2 = 0$). Le degré de lissage calculé varie entre 1 et 16, il est indiqué en chaque point à partir de la table de couleurs.

Ces résultats sont en cours d'intégration dans un logiciel de diagnostic de jets développé en collaboration avec la société EFS.

2.6.3. Segmentation de radiographies

La segmentation de vertèbres sur des radiographies est l'une des étapes importante d'un système de **chirurgie assistée par ordinateur** appliqué à la vertèbre (vissage pédiculaire). Ce système est développé en collaboration avec le laboratoire TIMC-IMAG (Université Joseph Fourier, Grenoble) et la société PRAXIM (La Tronche), dans le cadre d'un programme thématique région Rhône-Alpes (AdéMO) et d'un programme européen (MI3). Il s'agit de segmenter 2 radiographie prises sur un patient en cours d'opération, pour recalcr un modèle 3D de sa vertèbre. Une station de navigation permet ensuite au chirurgien de localiser ses instruments par rapport au modèle 3D.

Les vertèbres apparaissent sur les radiographies dans un environnement bruité et sous la forme de contours peu contrastés et flous de type transition ou ligne (cf. Figure 24(a)). Ces caractéristiques sont liées à la nature des radiographies qui intègrent tous les éléments situés entre la source et le détecteur. La segmentation envisagée est semi-automatique, c'est à dire que les contours détectés sont destinés à être validés par le chirurgien avant la reconstruction 3D de la vertèbre. Ainsi, l'objectif est de proposer au chirurgien un ensemble de contours le plus petit possible et contenant le maximum de contours appartenant à la vertèbre.

Nous avons appliqué d'une part le détecteur de contour par transformée en ondelettes, et d'autre part le détecteur par palpée morphologique adapté aux lignes (cf. Figure 24).

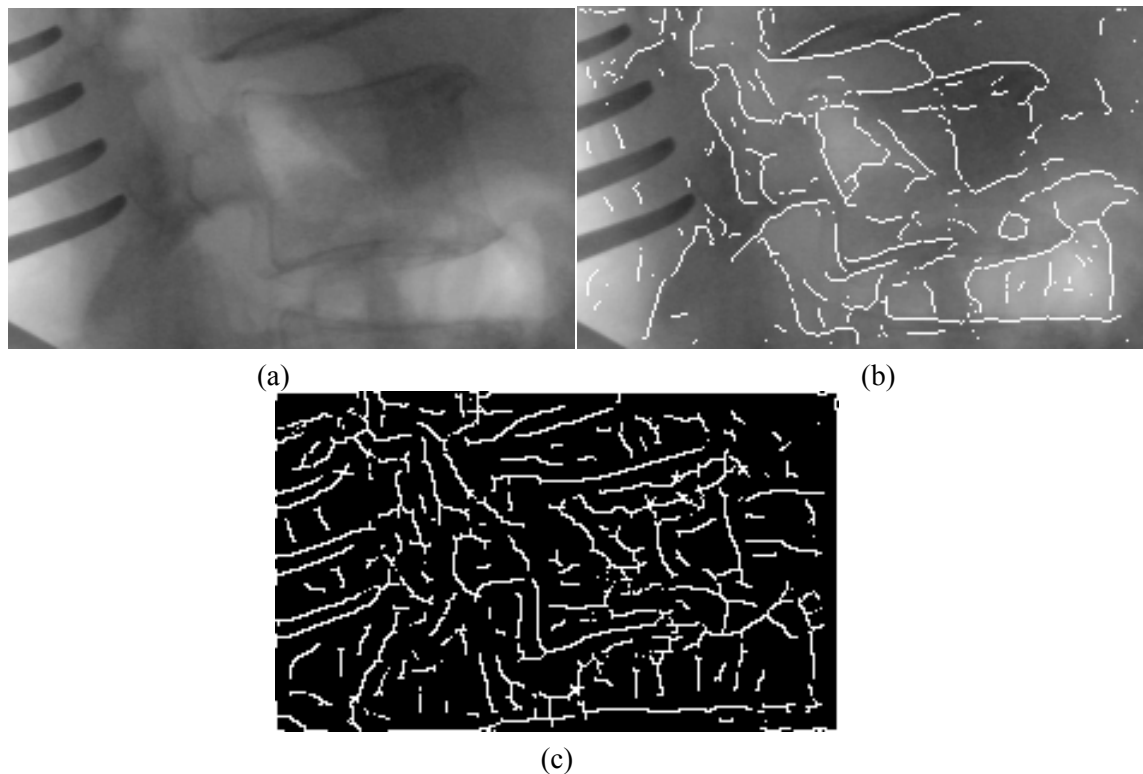


Figure 24 : Radiographie de vertèbre (a), détection par transformée en ondelettes (b) et détection par palpation morphologique avec un modèle de ligne (c).

Les deux **résultats obtenus sont complémentaires**. Dans la méthode par ondelettes, on détecte mieux les contours de type transition qu'ils soient nets ou flous, sans sélectionner trop de « mauvais contours ». Par contre les contours de type ligne sont mal détectés. Dans la méthode par palpation morphologique, on détecte beaucoup mieux les lignes, sans détecter correctement les transitions en particulier si elles sont floues.

On peut conclure qu'il serait intéressant de disposer d'un détecteur qui permette de détecter efficacement les transitions et les lignes, avec une adaptabilité au niveau de l'échelle. Dans l'état actuel du projet, une série de tests sur des phantoms a été menée avec le détecteur par ondelettes (Barat, Ducottet et al. 2003a). Il a ensuite été implanté dans un système de démonstration en vue d'une validation clinique.

2.7. Conclusion et perspectives

Nous avons élaboré **un modèle de singularités lissées** en dimension 1 et 2 permettant de prendre en compte les singularités rencontrées dans les signaux et les images réels. Ce modèle prend en compte les trois types de singularités lissées qui sont la transition, le pic et la ligne (uniquement en dimension 2) avec, pour chacun, un paramètre d'amplitude et un paramètre de taille de lissage.

Deux **algorithmes de caractérisation**, dérivés de ce modèle, et basés sur la transformation en ondelettes ont été mis au point. Le premier est adapté à la **détection de points caractéristiques** le long des contours d'objets sur des images en niveaux de gris. Les points détectés correspondent à des points de maximum de courbure pour lesquels on dispose d'une

estimation de la courbure locale. Une étude menée sur la robustesse de détection vis à vis de divers paramètres de prise de vue a montré une assez bonne conservation des points (sauf pour les changements d'échelle).

Le deuxième algorithme s'adresse à la **détection de contours**. Il permet d'une part de détecter et localiser chaque point de contour à une échelle localement adaptée à son degré de lissage et d'autre part d'identifier son type (transition, pic ou ligne) et ses paramètres d'amplitude et de taille de lissage. Après avoir vérifié la précision de détermination des caractéristiques des contours, des études sur l'influence du bruit et de la localisation adaptative ont été menées. La première a montré une tolérance au bruit jusqu'à un rapport signal sur bruit de -2DB pour la transition et la ligne, et 6 DB pour le pic. La deuxième a mis en évidence l'intérêt de l'adaptation de l'échelle pour la localisation de contours flous et bruités. C'est, à notre connaissance, **le seul algorithme de détection de contours** adaptatif en échelle utilisant la transformation en ondelettes.

Une approche par **palpage morphologique** a été également étudiée. Elle consiste à analyser la position relative de deux palpeurs amenés au contact de l'image respectivement par dessus et par dessous de celle-ci. Ce principe permet de définir deux opérateurs **tout à fait originaux**, se présentant comme des alternatives à la corrélation, c'est à dire capable de rechercher toutes les occurrences d'un motif défini à partir du gabarit formé par les deux palpeurs. Nous avons appliqué ces opérateurs à la détection de singularités de type pic ou ligne, en choisissant une combinaison de palpeurs adaptée à chacun des cas. On obtient ainsi de nouveaux modèles de pic et de ligne dont les paramètres caractéristiques sont la largeur, la hauteur avec en plus pour la ligne la longueur et l'orientation. Chaque gabarit permet de sélectionner uniquement le type de singularité qui lui correspond contrairement aux approches par convolution ou chapeau haut de forme. Pour les lignes, nous avons de plus accès à une information de longueur et d'orientation. Ces propriétés ont été confirmées à partir d'évaluations sur plusieurs types d'images.

Enfin, **trois applications** issues du domaine de la mécanique des fluides ou du domaine biomédical ont été présentées. Elles permettent d'illustrer l'intérêt des techniques présentées sur des problèmes pratiques d'estimation de mouvement ou de segmentation. Dans deux des applications présentées qui concernent la segmentation des jets diesel et la segmentation des radiographies, les algorithmes devraient être implantés dans des systèmes industriels.

En perspective, sur l'analyse de singularité par ondelettes, il serait intéressant d'étudier d'autre forme d'ondelettes, et en particulier une ondelette de type laplacien qui semble mieux adaptée à la détection de pics et de lignes. On pourrait alors se poser le problème de l'utilisation combinée de plusieurs ondelettes, chacune adaptée à un type particulier de singularité, en vue de synthétiser les résultats pour identifier toutes les structures détectées dans l'image. D'autre part, ayant montré que la détection de points caractéristiques relevait de la même problématique, nous pourrions aussi envisager de combiner les deux approches de détection de contours et de détection de points caractéristiques, pour aboutir à une caractérisation unifiée et plus complète des contours.

Sur l'approche morphologique, un point important restant à étudier est l'adaptation de taille : comment évaluer la taille des structures détectées pour pouvoir adapter localement la

forme du modèle de palpeur. On peut pour cela envisager de s'inspirer de l'algorithme mis en œuvre pour les lignes et qui consiste à palper la structure en plusieurs étapes en modifiant au fur et à mesure la forme des palpeurs. Un deuxième point est analogue à celui évoqué pour l'approche par ondelettes, il s'agit de la combinaison des différents types de palpeurs dans le but d'identifier et de mesurer les paramètres de toutes les structures de l'image quelque soit leur type, et en utilisant chaque fois le modèle le plus adapté.

3. Traitement numérique d'hologrammes

L'**holographie** est une technique optique permettant d'enregistrer et de restituer l'image tridimensionnelle d'un objet. Elle a été proposée par Gabor en 1948 et a été utilisée pour des mesures quantitatives de granulométrie et de vitesse de micro-particules respectivement depuis les travaux de Thompson (Thompson 1965) et de Royer (Royer 1977). Son principe consiste à faire interférer en éclairage cohérent, une onde de référence avec la lumière diffractée par l'objet, de manière à obtenir des franges d'interférences qui sont enregistrées sur un capteur sensible à l'intensité. Ces franges contiennent l'information sur la phase de l'onde issue de l'objet qui est ainsi enregistrée sous la forme d'un hologramme. Lorsque l'on éclaire l'hologramme en utilisant une onde identique à l'onde de référence, l'onde issue de l'objet se trouve reconstruite grâce au phénomène de diffraction.

Deux points délicats dans la mise en œuvre « optique » de cette technique ont historiquement limité son développement : l'enregistrement et la restitution. En effet, du fait de la faible période des franges d'interférence, il faut utiliser un support d'enregistrement haute résolution donc peu sensible. Ensuite, pour accéder à l'information enregistrée, il faut concevoir un montage optique de restitution comprenant une source cohérente et une caméra permettant d'examiner chaque plan de l'image tridimensionnelle restituée. Pour une exploitation automatique, les plans doivent être numérisés et dépouillés par traitement d'images. Nous avons d'ailleurs proposé dans ce cadre un algorithme de repérage des micro-particules à partir de leurs anneaux d'interférences (Ducottet, Moine et al. 1993). En dépit de ces difficultés de mise en œuvre, des résultats de mesure de champs de vitesses tridimensionnels dans des écoulements ont été obtenus (Malyak and Thompson 1983; Lozano, Kostas et al. 1999).

Depuis quelques années, l'utilisation de capteurs CCD haute résolution associés à des techniques de traitement numérique a permis de simplifier la mise en œuvre de la technique. On parle alors de **d'holographie numérique**. Le principe consiste d'une part à enregistrer les franges d'interférences directement sur un capteur CCD de manière à obtenir un **hologramme numérique**, puis d'autre part à **calculer numériquement la diffraction** de l'hologramme pour accéder aux différents plans de l'image tridimensionnelle enregistrée. Des applications métrologiques utilisant ce principe ont été proposées récemment (Kreis and Juptner 1998), notamment dans le domaine de l'étude des micro-particules (Dubois, Joannes et al. 1999; Kebbel, Adams et al. 1999) ou de la mesure de vitesse (Coetmellec, Buraga-Lefebvre et al. 2001).

Ces récentes avancées sont basées sur l'utilisation d'algorithmes particulièrement simples et efficaces pour le calcul numérique de la diffraction. Suivant l'approche considérée, ce calcul peut en effet se ramener à un produit de convolution, une transformée de Fourier, une transformation en ondelettes ou une transformation de Fourier fractionnaire (Ozaktas, Barshan et al. 1994; Pellat-Finet 1994).

Le travail que nous présentons ici se place dans le contexte du traitement d'hologrammes numériques en vue de mesurer la position, la taille, ou la vitesse d'un ensemble de particules enregistrées sur cet hologramme. En faisant le lien avec les ondelettes et l'analyse de singularités lissées, nous proposons d'abord une **fonction de restitution adaptée** à la

localisation des particules . Nous déduisons ensuite une **technique d'inter-corrélation** permettant la mesure du champ de déplacement des particules.

3.1. Ondelettes et fonction de restitution adaptée à la localisation

Nous expliquons d'abord comment s'expriment l'enregistrement et la restitution d'un hologramme numérique dans le cadre de la diffraction de Fresnel ainsi que les liens avec la transformation en ondelette. Les différentes propriétés soulignées constituent **les bases du traitement d'hologrammes numériques**. Nous montrons alors que le problème de la localisation d'une particule dans un hologramme relève de la même problématique que l'analyse des singularités. Nous en déduisons une étude sur l'influence de la fonction de restitution sur la localisation d'une particule. Nous proposons finalement une fonction de restitution adaptée à la localisation.

3.1.1. Enregistrement et restitution numérique d'un hologramme

Intégrale de diffraction, convolution et ondelettes

Le phénomène de diffraction est basé sur la nature ondulatoire de la lumière. D'après le principe d'Huygens-Fresnel, un objet plan éclairé par une onde lumineuse cohérente se comporte comme une infinité de sources secondaires émettant des ondes sphériques dont les amplitudes et les phases sont données par la transmittance de cet objet. L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point de l'espace est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires. Mathématiquement, pour une onde plane d'amplitude A_0 et de longueur d'onde λ éclairant l'objet plan de transmittance $t(x, y)$, l'amplitude complexe de l'onde diffractée, dans un plan distant de z du plan diffractant, s'exprime par l'intégrale de Rayleigh-Sommerfield (Goodman 1996) :

$$A_z(x, y) = \frac{A_0}{j\lambda} \iint t(\xi, \eta) \frac{e^{jkr}}{r} \cos(\theta) d\xi d\eta$$

$$\text{avec } r = \sqrt{z^2 + (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \text{ et } k = 2\pi/\lambda$$

$\frac{\exp(jkr)}{r}$ représente l'amplitude des ondes sphériques des sources secondaires.

$\cos(\theta)$ représente le facteur d'obliquité (Figure 25).

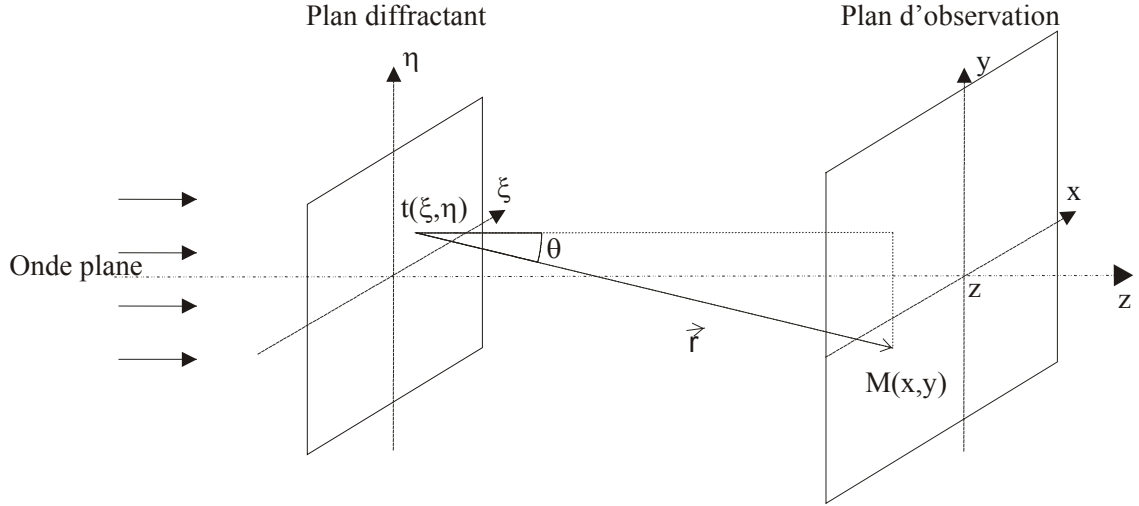


Figure 25 : Diffraction d'un objet plan

Dans l'approximation de Fresnel, c'est à dire lorsque la distance de restitution est grande, on peut négliger le facteur d'obliquité et développer l'expression du rayon au second ordre. L'intégrale s'écrit alors :

$$A_z(x, y) = \frac{A_0}{j\lambda z} e^{jkz} \iint t(\xi, \eta) \cdot e^{\frac{jkz}{2z}((\xi-x)^2 + (\eta-y)^2)} d\xi d\eta$$

Ce qui s'exprime sous la forme du produit de convolution :

$$A_z(x, y) = A_0 e^{jkz} (t * h_z)(x, y) \quad (6)$$

$$\text{avec } h_z(x, y) = \frac{1}{j\lambda z} e^{j\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda z}}$$

La fonction h_z est appelée **fonction de Fresnel**. Cette fonction est radiale et oscillante avec une fréquence qui varie linéairement en fonction du rayon. On peut la qualifier de **fonction « chirp radiale »**. Elle exprime la propagation d'une radiation lumineuse à une distance z et possède donc des propriétés particulières que l'on peut retrouver en remarquant qu'elle a la forme d'une gaussienne avec un écart type complexe égal à $\sqrt{j\lambda z/2\pi}$. Ces propriétés sont données par les relations suivantes :

$$h_{z_1} * h_{z_2} = h_{z_1+z_2} \quad (1)$$

$$h_{z_1} * \overline{h_{z_2}} = h_{z_1-z_2} \quad (2)$$

$$h_z * \overline{h_z} = \delta \quad (3) \quad (7)$$

$$K * h_z = K \quad (4)$$

$$F[h_z] = \frac{j}{\lambda z} h_{\frac{1}{\lambda^2 z}} \quad (5)$$

Dans ces relations, $*$ désigne le produit de convolution, K désigne une fonction constante et $F[]$ désigne la transformation de Fourier.

La propriété 3 permet de définir une transformation inversible que l'on peut appeler **transformation de Fresnel** qui permet de transformer une fonction f en sa transformée de Fresnel notée $Fr_z[f]$. On a donc :

$$\begin{aligned} Fr_z[f] &= f * h_z \\ f &= Fr_z[f] * \overline{h_z} \end{aligned}$$

La formule de reconstruction permet d'interpréter la transformée de Fresnel comme une décomposition sur une famille de fonctions chirp radiales se déduisant les unes des autres par translation. Pour chaque valeur de z , on obtient une décomposition différente. Cette transformation s'interprète alors comme une **transformation de Fourier fractionnaire** (Pellat-Finet 1994).

Le défaut des fonctions de Fresnel est de ne pas être localisées ni dans le domaine spatial, ni dans le domaine fréquentiel ce qui pose notamment des problèmes d'échantillonnage. On peut alors adopter la même approche que celle de Gabor qui consiste à **fenêtrer les fonctions de base** par exemple à l'aide d'une fonction Gaussienne. Si s désigne l'écart type de la fonction gaussienne, la **fonction de Fresnel fenêtrée** $h_{z,s}$ est définie par :

$$\begin{aligned} h_{z,s}(x, y) &= 2\pi s^2 (h_z G_s)(x, y) \\ h_{z,s}(x, y) &= \frac{1}{j\lambda z} e^{\left(-\frac{1}{s^2} + j\frac{\pi}{\lambda z}\right)(x^2 + y^2)} \end{aligned} \tag{8}$$

où G_s désigne la gaussienne normalisée définie par la relation (4).

Si l'on choisit une fenêtre de taille variable telle que $s = K\sqrt{z}$ (K facteur de proportionnalité), les fonctions de Fresnel fenêtrées se déduisent les unes des autres par changement d'échelle en \sqrt{z} . Moyennant une petite correction pour rendre la fonction à moyenne nulle, **on obtient ainsi une famille d'ondelettes** qui permet donc de définir une transformation complète (Onural 1993; Buraga-Lefebvre, Coëtmellec et al. 2000; Liebling, Blu et al. 2003).

Enregistrement de l'hologramme d'une particule

Nous allons calculer l'expression de l'intensité reçue par un capteur chargé d'enregistrer l'hologramme d'une particule de section circulaire. La particule est supposée située à la position (x_0, y_0, z_0) dans un repère fixé sur le capteur. Elle est éclairée par une onde plane orientée dans une direction normale au plan d'enregistrement de l'hologramme (cf. Figure 26). Le montage optique ainsi utilisé est dit **en ligne** car l'onde de référence et l'onde transmise par les particules sont alignées. Ce type de montage est couramment utilisé en holographie numérique ou l'on ne peut enregistrer correctement que des hologrammes à référence peu inclinée à cause de la résolution limitée des capteurs (Kreis, Adams et al. 1997).

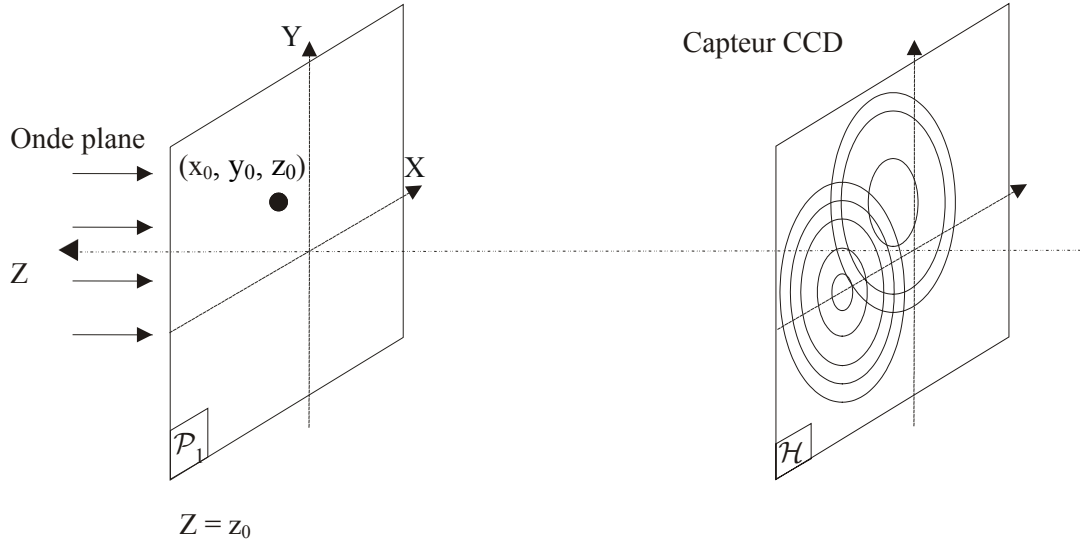


Figure 26 : Enregistrement de l'hologramme d'une particule

La particule de rayon R peut être représentée par un objet plan dont la transparence vaut 0 dans la particule et 1 à l'extérieur. On note \mathcal{G}_R la fonction cercle qui représente la fonction d'ouverture binaire de cette particule définie par :

$$\mathcal{G}_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} < R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transparence représentant la particule est la fonction complémentaire, c'est à dire la fonction $1 - \mathcal{G}_R$.

D'après la relation (6), l'amplitude complexe dans le plan du capteur est donnée par :

$$A(x, y) = A_0 e^{jkz_0} \left(\left(1 - \left(\mathcal{G}_R * \delta_{x_0, y_0} \right) \right) * h_{z_0} \right)(x, y)$$

D'après la propriété 4 de la fonction de Fresnel (équation (7)), on peut écrire :

$$A(x, y) = A_0 e^{jkz_0} \left(1 - \mathcal{G}_R * h_{z_0} * \delta_{x_0, y_0} \right)(x, y)$$

L'intensité enregistrée à un instant donné par le capteur est égale à $I = |A|^2$. En négligeant les termes du second ordre et les termes d'interférences, on obtient :

$$I(x, y) = A_0^2 \left(1 - 2\mathcal{G}_R * \Re(h_{z_0}) * \delta_{x_0, y_0} \right)(x, y)$$

Après acquisition de l'hologramme et numérisation (en utilisant un capteur CCD par exemple), on obtient l'hologramme numérique I_N dont les niveaux de gris sont proportionnels à I . On peut aussi supprimer la composante continue pour obtenir un hologramme numérique dont l'expression est :

$$I_N(x, y) = \left(\alpha \mathcal{G}_R * \Re(h_{z_0}) * \delta_{x_0, y_0} \right)(x, y) \quad (9)$$

où α est un facteur de proportionnalité intégrant le gain du capteur et la contribution de l'amplitude A_0 .

Cette expression montre que la distance z_0 de la particule est enregistrée sur l'hologramme sous la forme de franges d'interférences qui sont des anneaux concentriques dont la fréquence augmente linéairement en s'éloignant du centre. Le centre de ces anneaux est localisé à la position transversale (x_0, y_0) de la particule. Leur étendue spatiale est limitée du fait de la fonction d'ouverture de la particule qui se comporte comme un filtre passe-bas. Ainsi, les anneaux de hautes fréquences sont filtrés au delà d'un certain rayon (Figure 27)

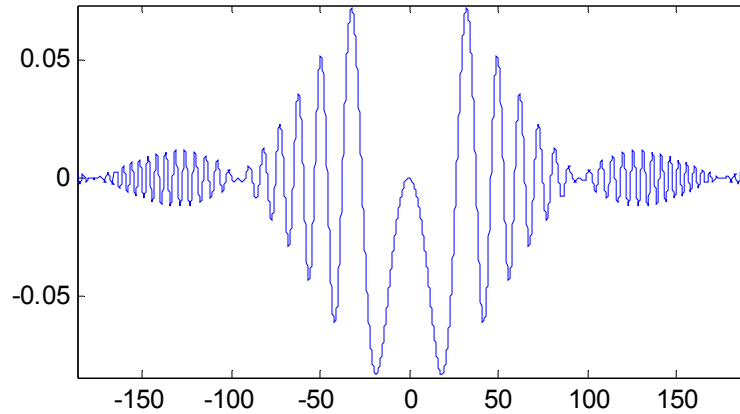


Figure 27 : Profil des anneaux d'interférence produits à l'enregistrement d'une particule de diamètre $60\mu\text{m}$, enregistrée à une distance de 50mm .

Si l'hologramme contient plusieurs particules, chacune d'elle produit un système d'anneaux dont l'échelle dépend de sa distance à l'hologramme. L'ensemble produit un hologramme dans lequel les différents systèmes d'anneaux se superposent (Figure 28).

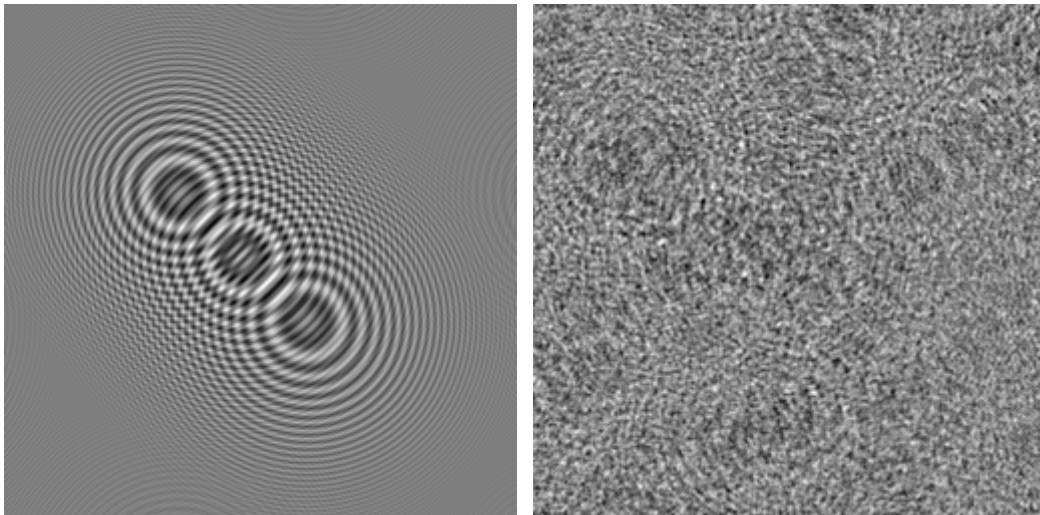


Figure 28 : Extraits d'hologrammes contenant 3 particules (a), et 1000 particules (b).

Restitution numérique de l'hologramme

Pour restituer l'hologramme, c'est à dire calculer l'amplitude de l'onde diffractée dans un plan situé à une distance z , il suffit d'utiliser à nouveau la relation (6), c'est à dire que l'on

convolue l'hologramme numérique par une fonction de Fresnel correspondant à la distance z . En pratique, nous pouvons supprimer le terme constant $A_0 e^{jkz}$ de sorte que l'amplitude restituée A_R vaut :

$$A_R(x, y) = (I_N * h_z)(x, y) \quad (10)$$

En tenant compte des propriétés 1 et 2 de la fonction de Fresnel, on obtient :

$$A_R = \alpha \left(\mathcal{G}_R * \delta_{x_0, y_0} * h_{z+z_0} + \mathcal{G}_R * \delta_{x_0, y_0} * h_{z-z_0} \right)$$

Le premier terme de cette expression correspond à **l'image dite virtuelle**, c'est à dire qu'elle correspond à une image située de l'autre côté de l'hologramme, à la distance z_0 . Le deuxième terme est **l'image réelle** reconstruite de la particule.

Si l'on voulait calculer **l'intensité lumineuse** détectée par un capteur placé dans le plan de restitution, il faudrait calculer le module au carré de cette expression. En fait il n'est pas intéressant d'effectuer ce calcul car il introduirait de nouveaux termes d'interférence entre l'image réelle et l'image virtuelle de la particule. L'information qui nous intéresse est contenue dans la position et la forme du terme correspondant à l'image réelle. Cette information est accessible à partir soit dans la partie réelle soit dans la partie imaginaire de ce terme. **Nous choisissons de retenir la partie réelle**. Ainsi, l'amplitude restituée que nous considérons est notée A'_R et est obtenue en prenant la partie réelle de A_R :

$$A'_R = \Re(A_R) = \alpha \left(\mathcal{G}_R * \delta_{x_0, y_0} * \Re(h_{z+z_0}) + \mathcal{G}_R * \delta_{x_0, y_0} * \Re(h_{z-z_0}) \right) \quad (11)$$

Lorsque la distance de restitution est proche de la distance de la particule, le terme correspondant à l'image virtuelle est beaucoup plus petit que celui correspondant à l'image de la particule. Pour une distance de restitution telle que $z = z_0$, le terme h_{z-z_0} devient une distribution de dirac (propriété 3) et l'on retrouve exactement la forme de la particule. On dit que l'on est à la mise au point. Lorsque le plan restitué s'éloigne de la mise au point, l'image de la particule est convoluée par une fonction de Fresnel et l'on observe, dans la partie réelle, un système d'anneaux qui se dilate au fur et à mesure que l'on s'éloigne de cette mise au point.

Lorsque l'hologramme possède plusieurs particules, dans un plan restitué, on observe simultanément des systèmes d'anneaux et des images de particules. Les systèmes d'anneaux correspondent aux particules qui n'appartiennent pas au plan alors que les images de particules correspondent aux particules qui appartiennent au plan restitué (cf. Figure 29).

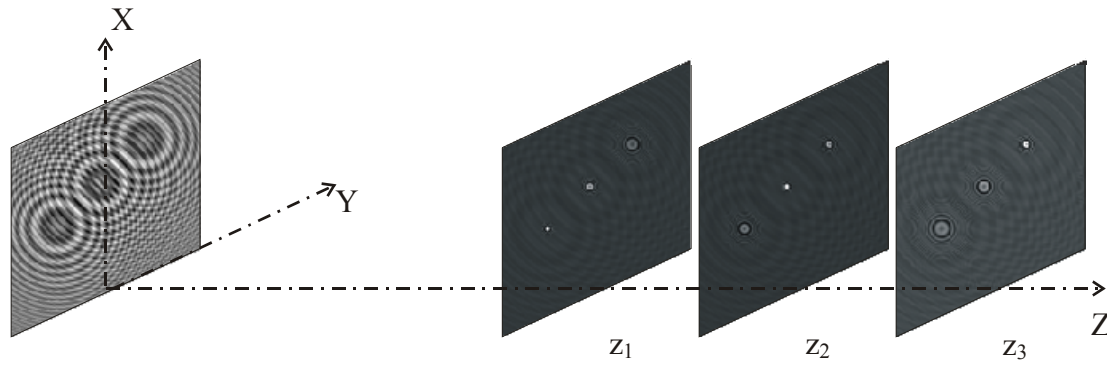


Figure 29 : Plans restitués à partir de l'hologramme numérique pour plusieurs distances de restitution.

En pratique, on utilise une fonction de Fresnel fenêtrée pour la restitution ce qui modifie la forme de la particule reconstruite. L'effet du fenêtrage sur la localisation est étudié dans le paragraphe suivant.

En comparant les relations (9) et (10), on remarque qu'en fin de compte, la restitution d'un hologramme revient à du filtrage adapté, puisque qu'elle revient à corrélérer l'hologramme avec une fonction de la même forme que l'objet recherché.

3.1.2. Localisation d'une particule et fonction de restitution

La localisation transversale (dans le plan (x,y)) d'une particule n'est pas difficile. Il suffit de repérer le centre des anneaux ou le centre de l'image de la particule. Par contre, pour localiser une particule suivant l'axe longitudinal (z), il faut rechercher la position de mise au point de cette particule, c'est à dire la position du plan dans lequel cette particule est parfaitement reconstruite. Le problème est que la forme du profil de la particule n'évolue pratiquement pas sur une grande distance de part et d'autre de la position de mise au point.

Ainsi, la plupart du temps, la localisation est faite en deux étapes. On commence par sélectionner, dans un plan restitué, les particules qui sont proches de la mise au point. Ensuite, on examine, dans des plans voisins, l'évolution de l'amplitude de chaque particule, c'est à dire son profil en z . Lorsque cette amplitude passe par un maximum, on considère que l'on est dans le plan de mise au point de la particule. On peut également déterminer une valeur plus précise de cette position en interpolant la forme du profil en z au voisinage du maximum. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.5.2., la première étape de sélection peut être mise en œuvre à l'aide des outils de **palpage morphologique**.

Nous montrons d'abord que l'étape de localisation relève de la même problématique que l'analyse de singularités lissées. Nous étudions ensuite la forme du profil en z en fonction des paramètres de la fonction de restitution des hologrammes.

Lien avec l'analyse de singularités lissées

Si l'on examine la relation (9), on constate que la particule enregistrée sur l'hologramme s'exprime sous la forme d'un produit de convolution composé de 2 termes : un premier terme $\mathcal{G} * \Re(h_{z_0})$ jouant le rôle d'un filtre d'une taille proportionnelle à z_0 et un deuxième terme δ_{x_0, y_0} qui est une singularité de type pic. Cette particule **s'interprète donc comme une**

singularité lissée de type pic, pour laquelle le filtre de lissage est une fonction de Fresnel au lieu d'une gaussienne.

Dans ce contexte, le dépouillement de l'hologramme pouvant être vu comme une transformation en ondelettes, **le profil en z de la particule s'interprète comme une fonction de maxima** telle que nous l'avons défini au paragraphe 2.2.1. On peut donc s'attendre à ce que ce profil possède des propriétés similaires à la fonction de maxima pour le modèle de type pic. C'est à dire que lorsque z tend vers l'infini, on aurait une décroissance en $(\sqrt{z})^{-2} = z^{-1}$ et, lorsque z s'approche z_0 , la fonction présenterait un maximum.

Forme du profil axial d'une particule

On considère ici que l'hologramme est restitué à partir d'une fonction de Fresnel fenêtrée par une gaussienne d'écart type s (équation (8)). Nous allons calculer l'expression du profil axial d'une particule et étudier sa forme en fonction des paramètres R et s .

Soit une particule enregistrée sur un hologramme numérique. Son expression théorique est donnée par l'expression (9). Si on ne considère que le terme lié à l'image réelle, l'amplitude restituée A_R est alors donnée par :

$$A_R = \left(\alpha \mathcal{G}_R * \overline{h_{z_0}} * \delta_{x_0, y_0} \right) * h_{z, s} \quad (12)$$

Compte tenu du fait que les fonctions de Fresnel possèdent les mêmes propriétés que les gaussiennes vis à vis du produit de convolution, on peut calculer analytiquement la valeur de $A_R(x_0, y_0)$ (Fournier, Ducottet et al. 2003b).

Un calcul approché plus simple est possible en remarquant que si l'écart type s de la fenêtre gaussienne est suffisamment grand c'est à dire si $s^4 \gg (\lambda z / 2\pi)^2$, on peut exprimer la fonction $h_{z, s}$ sous la forme d'un produit de convolution. En utilisant toujours la même notation pour la gaussienne on obtient alors :

$$h_{z, s} \simeq G_{\frac{\lambda z}{2\pi s}} * h_z \quad (13)$$

En reportant cette expression dans l'équation (12), et en tenant compte de la propriété (2) de la fonction de Fresnel, on obtient :

$$A_R = \alpha \mathcal{G}_R * G_{\frac{\lambda z}{2\pi s}} * h_{z-z_0} * \delta_{x_0, y_0}$$

En calculant la valeur de ce produit de convolution en (x_0, y_0) , on obtient l'expression du profil axial en fonction de z :

$$A_R(x_0, y_0) = \alpha \left(1 - \exp \left(- \frac{1}{2 \left(\frac{\zeta_0^2 R^2}{s^2} - j(\zeta - \zeta_0) \right)} \right) \right) \quad (14)$$

où les quantités ζ et ζ_0 désignent respectivement les positions en z normalisées du plan de restitution et de la particule tel que $\zeta = \frac{\lambda z}{2\pi R^2}$

L'expression (14) montre qu'en variables normalisées, la forme du profil axial ne dépend que d'une valeur a telle que :

$$a = \frac{\zeta_0 R}{s} = \frac{\lambda z_0}{2\pi R s} \quad (15)$$

Le profil axial $M\mathcal{G}_R(\zeta)$ d'une particule restituée exprimé en variable normalisée devient donc :

$$M\mathcal{G}_R(\zeta) = \Re e \left(A_R(x_0, y_0) \right) = \alpha - \alpha \Re e \left(e^{\frac{1}{2(a^2 - j(\zeta - \zeta_0))}} \right) \quad (16)$$

La Figure 30 montre l'évolution de $M\mathcal{G}_R(\zeta)$ en fonction de ζ , pour différentes valeurs du facteur a . En fait, ce paramètre joue le rôle d'un **facteur de forme** qui contrôle la largeur et le nombre de pics du profil axial.

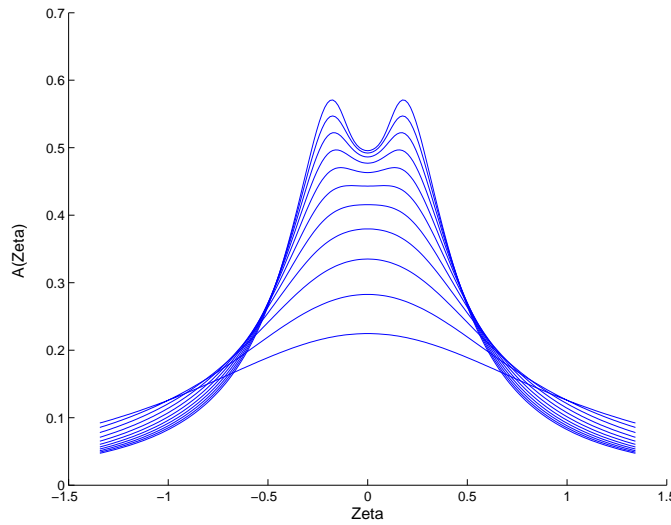


Figure 30 : Profil axial de la particule pour différentes valeurs du facteur de forme a .

On retrouve bien un résultat en accord avec ceux de l'analyse de singularités lissées de type pic, en tenant compte du fait que le paramètre d'échelle est $\sqrt{\zeta}$. En effet, d'après la relation (16), lorsque ζ tend vers l'infini, $M\mathcal{G}_R(\zeta)$ se comporte en $\zeta^{-1} = (\sqrt{\zeta})^{-2}$. D'autre part, on peut montrer que lorsque $a > 0.5$, le profil comporte un seul pic localisé à la position $\zeta = \zeta_0$.

Ce calcul met également en évidence que le profil axial ne contient pas systématiquement un seul pic correspondant à la position de mise au point. Suivant la taille de la fonction fenêtre, le profil peut présenter plusieurs paires de pics. En pratique, la taille limitée du capteur ou du faisceau d'enregistrement limite généralement le nombre de ces pics à 2 voire 4. **A notre connaissance, ce comportement n'avait jamais été souligné.**

3.1.3. Choix d'une fonction de restitution adaptée

Fenêtre de taille fixe

L'étude précédente permet de calculer la valeur du paramètre s de la fonction de reconstruction à partir de la forme du profil axial désiré. En fait, étant donné une forme de profil (choisie parmi les courbes de la Figure 30), il lui correspond une valeur spécifique du facteur de

forme a . De plus, si le rayon R des particules et les paramètres λ et z_0 du montage sont connus, la valeur s de l'écart type de la fonction fenêtre est donnée par :

$$s = \frac{\lambda z_0}{2\pi R a}$$

Pour la localisation axiale de la particule un simple pic est généralement préféré. En pratique, il est mieux de choisir une valeur légèrement plus grande que 0.5 pour ne pas avoir un pic trop plat. Un bon compromis semble être une valeur d'environ 0.7.

Fenêtre de taille variable

Si l'épaisseur du volume d'étude est grande, la valeur de z_0 est différente pour toutes les particules holographiées, et la forme du profil axial peut varier en fonction de la particule. Ce problème peut être corrigé en choisissant une fenêtre qui est fonction de la distance de reconstruction au lieu d'être fonction de la distance d'enregistrement. C'est à dire en prenant :

$$s = \frac{\lambda z}{2\pi R a'} \quad (17)$$

où a' est une constante.

Dans ces conditions, au voisinage de la position de mise au point, la valeur du facteur de forme est constante quelque soit la position de la particule. En effet, en reportant la nouvelle définition de s dans la relation (15), on obtient :

$$a = \frac{z_0}{z} a'$$

Choix final de la fonction de restitution

On a vu que, moyennant une approximation, la fonction de Fresnel fenêtrée pouvait s'écrire sous la forme d'un produit de convolution (cf. relation (13)). En fait, cette approximation n'est plus requise si l'on définit le fenêtrage de la fonction de restitution directement à partir de cette même relation. De plus, si l'on tient compte de la fenêtre de forme variable de la relation (17), on obtient comme nouvelle définition pour la fonction de restitution :

$$h'_{z,R} = G_{a'R} * h_z \quad (18)$$

Cette définition permet de calculer la restitution en 3 temps :

1. restitution avec une fonction de Fresnel non fenêtrée,
2. mesure du rayon de la particule,
3. convolution du résultat par une Gaussienne dont l'écart type est proportionnel au rayon de la particule (en pratique, pour un seul pic, on peut prendre $a'=0.7$).

Lors de la première étape, la restitution sans fenêtrage reconstruit une particule dont la taille est proche de la taille réelle de la particule. La convolution par la gaussienne permet ensuite d'obtenir une forme de profil axial adaptée à l'étape de localisation.

3.2. Mesure du champ de déplacement par inter-corrélation

Une des applications importantes de l'holographie numérique de micro-particules est la mesure de champs de vitesses tridimensionnels dans les écoulements fluides. Pour cela, des micro-particules ayant une densité proche du fluide étudié sont d'abord ajoutées à celui-ci.

Ensuite, on enregistre des hologrammes numériques de l'écoulement contenant les particules à plusieurs instants successifs. On obtient finalement le champ de vitesse en repérant le déplacement des micro-particules entre les hologrammes successifs.

Ce type de mesure a déjà été proposé en holographie optique puis numérique (Kreis, Adams et al. 1997). Dans ce cas, le dépouillement des hologrammes qui est proposé utilise **une approche de « tracking »**. Il consiste d'abord à mesurer les trois coordonnées de toutes les particules dans chaque hologramme. Ensuite, en suivant les particules dans les hologrammes successifs, on en déduit les déplacements tridimensionnels. **Le principal inconvénient** de cette technique est qu'elle fonctionne bien, uniquement si le nombre de particules enregistrées sur l'hologramme est faible. En effet, si ce nombre est élevé, il devient difficile de repérer chaque particule et de déterminer sa position axiale.

Nous proposons dans ce paragraphe **une technique basée sur la corrélation**, qui ne nécessite pas le repérage individuel de chaque particule dans les hologrammes successifs. Nous commençons par expliquer le principe de cette technique, nous détaillons ensuite le point central qui est la localisation d'un motif de particules à partir d'un masque binaire. Nous indiquons finalement les résultats obtenus.

3.2.1. Principe de la technique de corrélation

Considérons deux hologrammes H_1 et H_2 correspondant à l'enregistrement d'un ensemble de particules à deux instants successifs. Pour mesurer le champ de déplacement tridimensionnel de ces particules, on commence par **définir une partition de l'espace enregistré** en cellules élémentaires parallélépipédiques. La partition est la même pour les deux hologrammes. La taille des cellules est choisie de telle manière que le champ de déplacement puisse être considéré comme uniforme à l'intérieur de chaque cellule.

Pour chaque cellule de la partition, la mesure est ensuite effectuée en 3 étapes :

1. **Extraction d'un masque binaire** constitué des projections des centres des particules de l'hologramme H_1 qui appartiennent à la cellule,
2. **Localisation de ce masque** dans chaque hologramme par corrélation,
3. **Calcul du déplacement moyen** des particules par différence entre les 2 positions trouvées.

En fait, les deux premières étapes sont similaires à la procédure de localisation d'une particule que nous avons étudié au paragraphe 3.1.2. :

- à partir d'un plan restitué, on commence par détecter les particules d'une cellule qui sont proches de la mise au point,
- on localise ensuite finement ces particules en calculant un profil axial.

Le point clé de la technique est de ne pas considérer les particules individuellement, mais d'étudier un ensemble de particules constituant un motif, qui est ensuite localisé dans les hologrammes.

Remarquons que la localisation du masque dans l'hologramme H_1 est nécessaire, bien que ce masque soit extrait à partir de ce même hologramme. En effet, suivant la distribution des particules dans la cellule de mesure, le masque ne sera pas localisé systématiquement au centre de celle-ci.

3.2.2. Extraction du masque binaire

Un motif de particules est défini comme l'ensemble des particules appartenant à une cellule élémentaire dans un hologramme. Le masque binaire correspondant à ce motif est constitué des projections des centres de toutes les particules du motif. Il représente la distribution transversale des particules du motif. Pour un motif de P particules distribuées transversalement suivant un ensemble de points $(x'_i, y'_i)_{i=1, \dots, P}$, le masque est défini par :

$$M = \sum_{i=1}^P \delta_{x'_i, y'_i}$$

Le masque binaire est extrait à partir du plan restitué passant par le centre de la cellule élémentaire. On le construit en repérant dans ce plan, les particules qui sont proches de la mise au point. Si dz désigne l'épaisseur de la cellule, on retient les particules dont la distance au plan est inférieure à $dz/2$ (Figure 31).

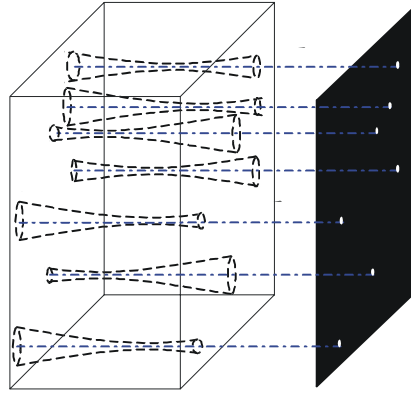


Figure 31 : Définition du masque binaire représentant un motif de particules.

En pratique, la sélection des particules se fait en utilisant, par exemple, la technique de palpement morphologique du paragraphe 2.5.2., en utilisant une paire de palpeurs adaptée à l'épaisseur de la cellule.

3.2.3. Localisation du motif à partir du masque binaire

Le motif de particule peut être localisé dans un hologramme de la même façon qu'on localise une particule. Pour cela, il suffit de **calculer la corrélation entre des plans restitués de l'hologramme et le motif de particule**. On obtient alors un pic de corrélation, dont la position transversale nous donne la position $(\delta x, \delta y)$ du motif par rapport au masque. D'autre part, le profil axial obtenu en reportant l'amplitude du pic en fonction de z nous donne la position transversale moyenne δz (Figure 32).

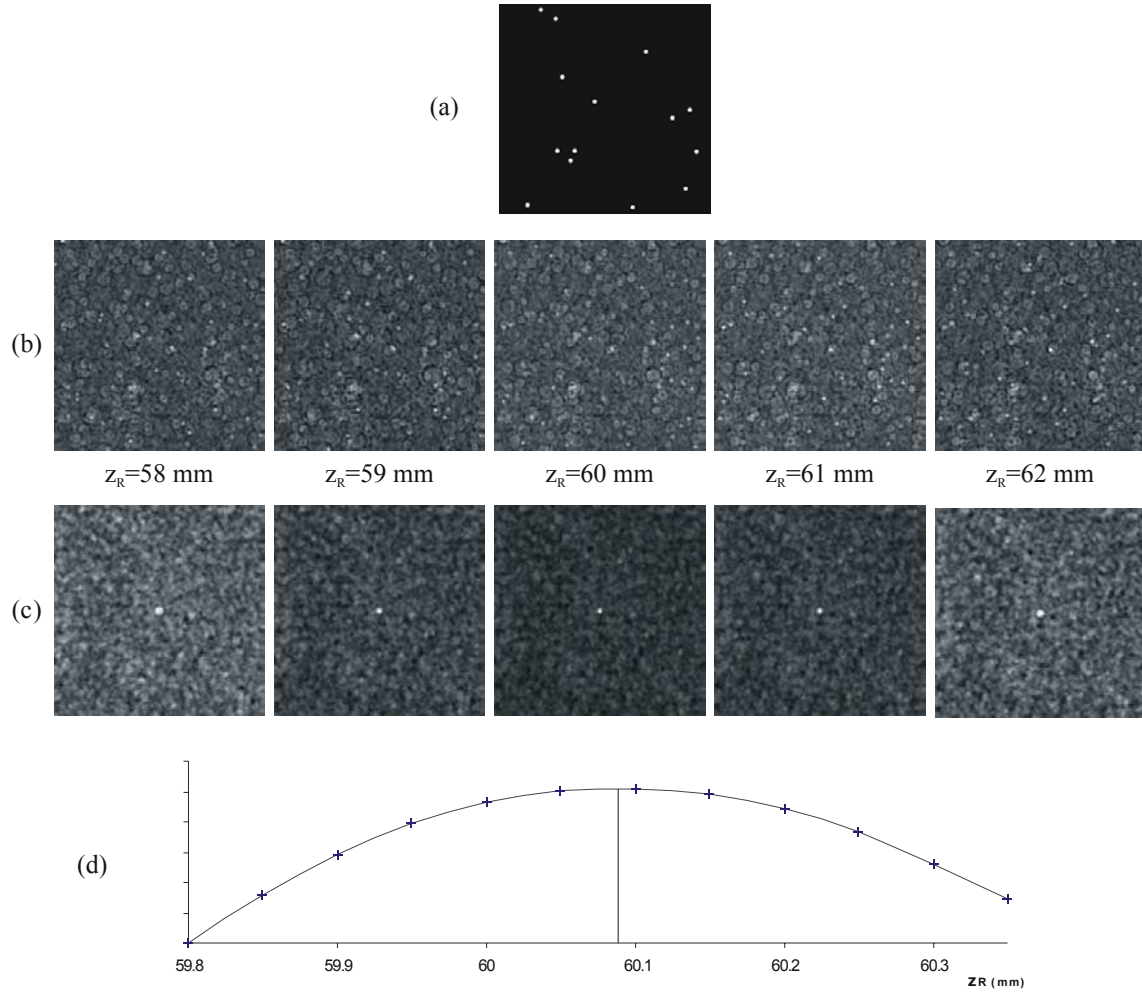


Figure 32 : Localisation d'un motif de particules à partir d'un masque binaire. Masque binaire (a), plans restitués (b), résultat de la corrélation avec le masque (c), interpolation du pic de corrélation pour la localisation axiale (d).

Ce résultat peut être démontré en remarquant que la corrélation entre un plan restitué et le masque revient à faire la somme des particules restituées du motif. Plus précisément, notons A_R l'amplitude dans un plan restitué à partir d'un hologramme de P particules situées aux positions $(x_i, y_i, z_i)_{i=1, \dots, P}$. En utilisant la fonction de restitution de l'équation (18) et en ne considérant que l'image réelle des particules, on a :

$$A_R = \alpha \sum_{i=1}^P \mathcal{G}_R * G_{a'R} * h_{z-z_i} * \delta_{x_i, y_i}$$

La corrélation C_Z entre A_R et M comporte un terme principal correspondant à la superposition entre les particules restituées et les particules du masque, et des termes croisés correspondant à des correspondances croisées. Dans l'hypothèse d'un déplacement uniforme, si on ne tient compte que du terme principal dont la contribution est P fois supérieure aux termes croisés, on obtient :

$$C_z = \alpha \left(\sum_{i=1}^P \mathcal{G}_R * G_{a'R} * h_{z-z_i} \right) * \delta_{\delta x, \delta y}$$

Ainsi, le pic de corrélation est situé à la position $(\delta x, \delta y)$ et son amplitude en fonction de z est égale à la somme des profils axiaux des particules :

$$C_z(\delta x, \delta y) = \sum_{i=1}^P M \mathcal{G}_R(z)$$

Si les profils axiaux sont suffisamment réguliers (ce qui est garanti avec la fonction de restitution utilisée), cette somme de profils présente **un maximum situé au barycentre du motif** de particules. La position précise du maximum est estimée à partir d'une **interpolation parabolique** calculée au voisinage de la position de ce maximum.

On peut remarquer que cette procédure peut aussi être adaptée au cas des **particules de taille variable**. Dans ce cas, il suffit de prendre un masque constitué de gaussiennes centrées à la position des particules et dont l'écart type est proportionnel au rayon. On réalise alors une restitution non fenêtrée suivie de la corrélation avec ce nouveau masque.

Par rapport à une localisation individuelle des particules, le calcul de corrélation que nous proposons ici permet de mesurer la position du motif sans avoir besoin de localiser chaque particule. De plus, de part l'effet de cumul entre les profils axiaux des particules, le profil de corrélation est moins sensible au bruit que ces profils axiaux pris individuellement. **Cette méthode s'applique donc à des hologrammes de plus forte densité que la méthode de tracking.**

3.2.4. Résultats

Nous avons testé cette technique de corrélation sur une simulation numérique et sur une simulation expérimentale d'écoulements.

La simulation numérique concernait un nuage de 5000 particules distribuées dans un volume de $6.9 \times 6.9 \times 3.6 \text{ mm}$. Ce nuage se déplaçait suivant l'axe z avec un déplacement augmentant linéairement entre $465 \text{ }\mu\text{m}$ et $600 \text{ }\mu\text{m}$. Les déplacements ont pu être mesurés dans les 54 cellules constituant la partition tridimensionnelle. Les résultats obtenus présentent un écart moyen entre théorie et mesure de $0.36 \text{ }\mu\text{m}$ et un écart type de $18.5 \text{ }\mu\text{m}$.

La simulation expérimentale a été effectuée à partir de 3 plaques de verre comportant des particules de Lycopodes de diamètre $30 \text{ }\mu\text{m}$. L'une des plaques était soumise à une rotation, tandis que les deux autres restaient immobiles de manière à constituer un écran devant la plaque mobile (Figure 33). Conformément à la configuration expérimentale, le déplacement mesuré sur l'axe z évoluait linéairement en fonction de la position sur la plaque mobile. L'écart type de l'erreur de mesure a été évalué à $22 \text{ }\mu\text{m}$ ce qui est du même ordre de grandeur que la simulation numérique. Nous avons pu également retrouver la valeur de l'angle de rotation avec une très bonne précision.

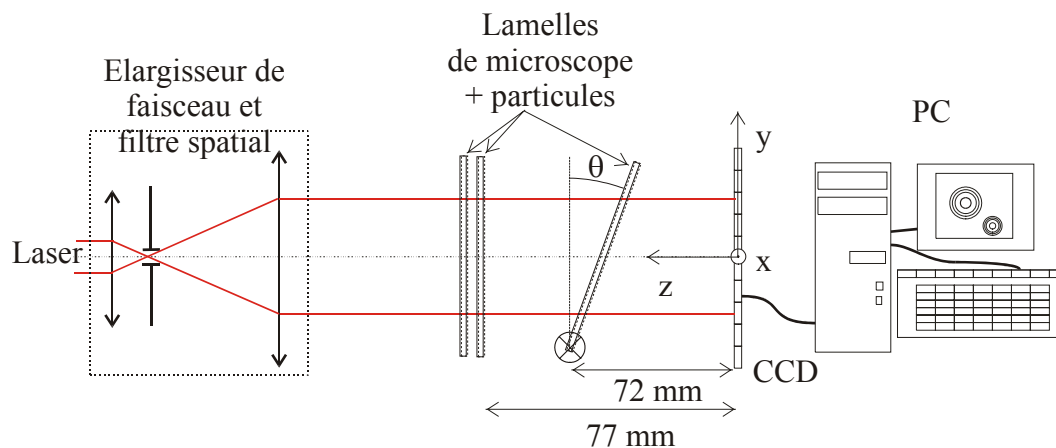


Figure 33 : Configuration expérimentale de la simulation

3.3. Conclusion et perspectives

L'holographie numérique de micro-particules est une technique d'enregistrement tridimensionnelle pour la mesure de position et de vitesse de particules dans un fluide. Elle peut être mise en œuvre simplement en enregistrant directement les hologrammes sur un capteur numérique (de type CCD ou CMOS).

L'enregistrement et la restitution numérique des hologrammes sont modélisés à partir de fonctions «chirp» radiales appelées fonctions de Fresnel. Ces opérations peuvent alors être interprétées comme un produit de convolution, une transformée de Fourier fractionnaire ou une transformation en ondelettes.

Nous avons montré dans cette partie que le problème de localisation d'une particule à partir d'un hologramme numérique s'apparente à l'**identification des paramètres d'une singularité** lissée. Elle utilise une fonction profil axial dont nous avons calculé la forme analytique. Cette forme dépend du fenêtrage utilisé pour la fonction de Fresnel. Ces résultats nous ont permis de déduire une fonction de restitution adaptée à la localisation, et une procédure de calcul de la restitution. Ces deux points constituent un **apport original** dans le domaine de l'holographie numérique et du traitement du signal.

Nous avons étudié d'autre part le problème de la mesure du champ de déplacement d'un nuage de particules entre deux hologrammes. Ce problème peut être résolu à partir d'une **mesure différentielle basée sur la corrélation** qui ne nécessite pas la localisation individuelle des particules enregistrées. L'avantage de cette solution, est qu'elle peut être appliquée dans des hologrammes de **plus forte concentration** en particules que la technique de repérage individuel de chaque particule (tracking). Un masque binaire correspondant aux centres des projections des particules d'une cellule de mesure est d'abord extrait à partir d'un hologramme. Ce masque est ensuite corrélé avec des plans restitués dans chacun des deux hologrammes, de manière à obtenir un pic de corrélation suivant les 3 directions x, y et z . La différence de position entre les pics issus des deux hologrammes donne le vecteur déplacement tridimensionnel.

Cette technique de mesure tridimensionnelle a été validée à partir de mesures simulées numériquement et expérimentalement. Le biais évalué sur les mesures est inférieur au micron, alors que l'écart type de l'erreur est de l'ordre de $20\mu m$. Cette technique permet ainsi d'atteindre

une précision tout à fait comparable à la méthode de *tracking* qui avait été proposée. **Ses principaux avantages** sont qu'elle nécessite un nombre de calcul plus réduit et surtout qu'elle est applicable dans des cas où la concentration en particules est plus élevée.

Deux directions de recherches futures sont envisageables à la suite de ces travaux. Pour pouvoir parvenir à un stade de mesures sur écoulements réels, il faudrait d'abord perfectionner l'étape d'extraction du masque binaire. En effet, lorsque l'on augmente le nombre de particules dans l'hologramme, il devient de plus en plus difficile de repérer les particules qui sont proches de la mise au point. On peut envisager dans ce cas, d'utiliser plusieurs plans successifs, en tenant compte des particules déjà détectées et/ou en utilisant les caractéristiques du bruit de restitution. Plus généralement, on pourrait tenir compte de la forme tridimensionnelle des particules restituées.

Sur un autre plan, des **mesures de taille** et de **distribution granulométrique** de particules sont possibles. En effet, l'image restituée des particules contient une information de diamètre de celles-ci. On peut soit mesurer individuellement les diamètres des particules, soit trouver une estimation globale de la distribution granulométrique. La première approche, combinée avec la mesure de déplacement, permettrait d'accéder simultanément à la vitesse et à la distribution granulométrique tridimensionnelle des particules.

4. Bilan et perspectives de recherche

4.1. Résumé des principaux résultats

Les résultats présentés dans ce mémoire concernent deux thèmes de recherche : l'analyse de singularités dans les images et le traitement numérique d'hologrammes.

Dans le premier thème, nous avons présenté **un modèle de singularités lissées** et trois **méthodes d'analyse** associées. Le modèle permet de décrire trois types de singularités rencontrées dans les signaux ou les images réels : la transition, le pic et la ligne.

La première méthode d'analyse a pour but **de détecter des points caractéristiques** le long des contours d'objets. Ces points correspondent à des points de maximum de courbure. Cette méthode a pu être appliquée à l'estimation du mouvement d'objets non rigides.

La deuxième méthode est dédiée à la **détection et à la caractérisation de contours** dans les images, avec une **adaptation locale de l'échelle** de localisation. Pour chaque point de contour détecté, une estimation de son type, de son amplitude et de sa taille de lissage est effectuée. Après avoir été validée sur des images synthétiques, cette méthode a été appliquée à la segmentation de jets diesels et de radiographies.

La troisième méthode est fondée sur la notion de **palpage morphologique**. A partir de la définition d'un gabarit formé par deux palpeurs, elle permet de détecter toutes les instances des objets inclus dans le gabarit. Nous avons pu appliquer cette méthode à la sélection des particules dans un hologramme numérique (objets de type pic), ou à la détection de vertèbres dans les images radiographiques (objets de type ligne).

Dans le deuxième thème, nous avons considéré deux problèmes de traitement d'images posés par la technique **d'holographie numérique de micro-particules** : la localisation tridimensionnelle des particules enregistrées, et l'estimation du champ de déplacement entre deux hologrammes successifs.

Après avoir exprimé le problème de localisation d'une particule en terme **d'analyse de singularité**, nous avons proposé une fonction de restitution adaptée à la localisation basée sur la fonction de Fresnel. Cette fonction garantie d'obtenir une forme régulière pour le profil axial d'une particule. Dans le cadre de **l'estimation du champ de déplacement**, l'algorithme que nous avons mis au point, est basé sur la localisation par corrélation, d'un motif de particules. Il permet la mesure des trois composantes du déplacement dans une partition tridimensionnelle du volume d'étude. Les algorithmes développés ont été validés sur une simulation numérique et une simulation expérimentale.

4.2. Bilan global des résultats obtenus

L'ensemble de ces travaux s'inscrit dans un thème de recherche plus général qui est celui de la recherche de **modèles et d'outils pour la mesure par traitement d'images**. Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.2., ce thème correspond à l'une des trois opérations de recherche du groupe IMAGE (pour mémoire, ces trois opérations sont : les modèles, la mesure 3D et les architectures).

En effet, **deux modèles ont été particulièrement étudiés** : un modèle de singularité lissées et un modèle de restitution d'hologrammes. Le premier modèle permet de prendre en compte un

certain degré de lissage lors de la détection d'éléments caractéristiques. Ce lissage est lié à la nature particulière des images considérées. Par exemple, pour la détection de contours de nuages de particules, le lissage correspond aux propriétés de diffusion de ces particules. Pour la détection de vertèbres dans les radiographies, le lissage est lié à l'effet de projection : une surface plane, vue en projection, produit une transition progressive dans les niveaux de gris.

Le deuxième modèle, celui de la restitution d'hologrammes, a été déduit des propriétés de la diffraction : la diffraction peut se calculer comme un produit de convolution avec la fonction de Fresnel. En prenant en compte la forme des particules enregistrées et le montage d'enregistrement, nous avons pu déduire une fonction de restitution adaptée à la localisation.

Pour les deux modèles développés, **des outils ont été mis au point**, en s'appuyant sur des techniques de traitement d'images et notamment sur la transformation en ondelettes ou la corrélation. Dans le premier cas, ce sont des outils de détection de points caractéristiques, de contours ou d'objets de forme quelconque. Dans le deuxième cas, ce sont des outils de localisation d'une particule ou d'un motif de particules dans un hologramme numérique.

Dans les deux cas également, les outils ont été **appliqués à la mesure** dans le domaine de la mécanique des fluides ou du biomédical. Citons les applications présentées dans ce mémoire qui sont : l'étude de la diffusion turbulente, l'étude de l'injection diesel et la chirurgie assistée par ordinateurs. **D'autres applications** qui ne sont pas développées dans ce mémoire ont été considérées dans le cadre de contrats ou de programmes de recherches publics. Notamment, l'étude de la cavitation pour le traitement des eaux par ultrasons (thèse de Myriam CHOUVELLON) ou l'étude du charriage torrentiel menée avec le CEMAGREF de Grenoble.

On peut noter également une **forte interaction** avec le thème mesure 3D du groupe pour la partie holographie numérique. Dans ce cas, le développement des outils de traitement est pratiquement indissociable de celui de la technique de mesure elle-même.

4.3. Perspectives à moyen terme

Nous avons déjà évoqué plusieurs perspectives de poursuite de ces travaux à moyen terme. Dans le cas de **l'analyse de singularités**, la comparaison entre les méthodes à base d'ondelettes et les méthodes morphologiques doit être poursuivie. Pour cela, on pourra notamment étudier d'autres ondelettes (et notamment l'ondelette laplacien de gaussienne) et voir comment les combiner, pour obtenir une meilleure détection des singularités lissées de type ligne. En morphologie, la combinaison de palpeurs de taille et de forme variable devrait également permettre de développer des approches adaptatives pour obtenir une détection plus efficace.

Ces travaux pourront être poursuivis dans le cadre de la thèse de Cécile BARAT qui doit se terminer en 2004. Ils devront se faire en gardant un lien fort avec les applications dans les domaines du biomédical et de la mécanique des fluides.

Dans le cas de **l'holographie numérique**, l'étape d'extraction du masque binaire devra être améliorée pour pouvoir travailler avec de plus grands nombres de particules. On peut notamment envisager des approches itératives qui combinent une étape de sélection des particules et une étape de corrélation : les particules du masque sont validées de proche en proche en essayant d'améliorer la qualité de la corrélation...

Le problème de la **mesure de taille** pourra être développé également. Dans l'algorithme actuel, pour chaque cellule de mesure, on extrait un masque et on détermine la taille des particules de ce masque. Ainsi, on peut directement associer une mesure de taille de particules à la mesure de vitesse dans chacune des cellules. Il faudrait quantifier la précision de cette mesure de taille et étudier l'effet d'une distribution de taille des particules.

Un autre point de vue consisterait à étudier directement la distribution de taille des particules d'un hologramme, sans avoir besoin de mesurer chaque particule individuellement. De premières investigations encourageantes ont été menées dans cette direction avec Jérôme SENESCHAL...

Suite à la thèse de Corinne FOURNIER qui sera soutenue en novembre, et qui est nommée ATER, nous demanderons une bourse pour la rentrée 2004.

4.4. Orientations de recherche proposées

Depuis sa création par Jean-Paul SCHON en 1991, le groupe IMAGE a été animée successivement par Jean-Paul SCHON, Robert FOUQUET, Thierry FOURNEL puis Dominique JEULIN. Cette alternance d'animateurs (avec une périodicité d'environ 4 ans), qui a été initiée peu après la création du groupe, est un principe volontaire qui s'est révélé très bénéfique au développement du groupe. Elle est notamment l'occasion de revoir l'organisation pratique, de développer de nouveaux thèmes ou de nouvelles collaborations.

Suite au départ de Dominique JEULIN et en concertation avec les autres membres du groupe, j'envisage de **prendre la responsabilité d'animation du groupe IMAGE** à partir du mois de janvier 2004. Temporairement, c'est Jean-Paul SCHON qui assure cette fonction.

Dans cette perspective, je développe dans ce paragraphe, des orientations de recherche à plus long terme. Je commence par indiquer les développements possibles dans les trois opérations de recherche actuelles du groupe. Dans un cadre plus large je présente ensuite les actions transversales au niveau du laboratoire ou du Pôle Optique et Vision de l'Université.

4.4.1. Orientations dans le cadre du groupe

Dans l'opération « modèles et outils », les travaux sur l'analyse de singularités à partir d'ondelettes et de morphologie, peuvent être **étendus à trois dimensions**. Le but serait de pouvoir détecter et caractériser des singularités dans des images 3D obtenues par des techniques d'imagerie spécifiques. Dans ce cadre, un programme de recherche thématique régional avec un financement de thèse en collaboration avec l'Ecole des Mines de Saint-Etienne vient d'être accepté. Il s'agit d'étudier la morphologie d'inclusions dans l'aluminium à partir d'images de micro-tomographie aux rayons X.

Les travaux sur **l'holographie numérique** qui ont été menés ouvrent des perspectives en lien avec les deux autres opérations de recherche du groupe. Tout d'abord sur le plan des techniques de mesures, d'autres montages d'holographie pourraient permettre de faire des mesures tridimensionnelles.

Par exemple, un montage en réflexion à référence faiblement inclinée, donnerait accès à des mesures de forme de surfaces à l'échelle du micromètre. Les algorithmes développés pour l'holographie en ligne seraient applicables en tenant compte de l'incidence de l'onde de

référence. Par contre, dans ce cas, l'information de profondeur serait disponible à partir de la phase de l'onde reconstruite. Il faudrait donc développer de nouveaux algorithmes pour exploiter cette information de phase.

Sur le plan du **développement matériel** (dans le cadre de l'opération architecture), de nouvelles architectures de traitement pourraient être étudiées.

Une architecture baptisée *Round-About* a déjà été mise au point avec la thèse de Julien DUBOIS (soutenue en 12/00) pour faire de la corrélation en temps réel. La plupart des traitements d'holographie étant aussi à base de corrélation, on peut envisager d'adapter cette architecture pour accélérer le traitement des hologrammes. Ce travail serait une étape importante pour aboutir à des systèmes de mesure intégrés, utilisables dans le contexte de la mesure ou du contrôle industriel.

4.4.2. *Orientations transversales au laboratoire*

Deux types d'actions mettant en interactions plusieurs groupes du laboratoire ainsi que d'autres laboratoires stéphanois sont en cours actuellement : la vision en milieu diffusant et le projet ATMOSS du Pôle Optique et Vision. Nous allons expliquer comment ces actions sont dans le prolongement des thèmes de recherche détaillés précédemment.

Vision en milieu diffusant

L'**action vision en milieu diffusant** a été initiée par Dominique JEULIN dans le cadre d'une collaboration avec le groupe Instrumentation et Microsystèmes Optiques (IMO) et le groupe Laser et Application (LA). Cette action fait l'objet d'une Action spécifique CNRS. Elle consiste à étudier des techniques de formation et de traitement d'images en présence d'un milieu diffusant. Les techniques mises en jeu concernent particulièrement l'imagerie confocale, l'holographie temporelle et l'holographie numérique. L'enjeu est de pouvoir adapter ces techniques et les traitements associés, pour obtenir des informations sur les objets étudiés en présence d'un milieu fortement diffusant. Les applications visées concernent principalement l'imagerie biomédicale.

Cette action relève tout à fait de la thématique « modèles et outils pour la mesure », que nous avons déjà évoquée. En effet, il faudra d'abord modéliser le milieu diffusant ainsi que l'interaction entre l'instrument et ce milieu pour parvenir à une exploitation correcte de l'information enregistrée. Pour la modélisation du milieu, une approche utilisant les modèles aléatoires sera étudiée en collaboration avec le centre de morphologie mathématique de Fontainebleau. L'instrumentation mise en œuvre devrait utiliser la microscopie confocale. Une thèse démarre cette année pour l'étude spécifique de l'imagerie à travers les tissus biologiques du cerveau.

Projet ATMOSS

Dans le cadre du nouveau contrat quadriennal 2003-2006, l'Université Jean Monet souhaite structurer son implication au sein du Pôle Optique et Vision de Saint-Etienne. Pour cela, elle s'appuie sur **un programme technologique intitulé ATMOSS** (Atelier des Technologies de Microstructuration pour les applications Optiques sur Surfaces et Substrats non conventionnels). Ce programme vise à concentrer à Saint-Etienne, en complémentarité avec le Pôle Grenoblois

MINATEC, l'ensemble des moyens permettant la microstructuration, à l'échelle de la longueur d'onde optique, sur des substrats non conventionnels en forme, taille, nature.

Dans ce contexte, il est prévu de mettre au point des **dispositifs de caractérisation** en ligne, lors du processus de fabrication. Ces dispositifs intégreront une caméra CCD ou CMOS associée à un système optique spécifique adapté à la résolution spatiale nécessaire. A partir de l'expérience déjà acquise dans le domaine de l'holographie numérique, nous pourrions mettre au point ou perfectionner des systèmes de contrôle de surfaces utilisant une onde de référence inclinée. En exploitant l'information de phase reconstruite à partir de l'hologramme, on peut espérer, après traitement, obtenir des résolutions très inférieures au micromètre.

Conclusion

Ce mémoire a présenté deux thèmes de recherche relatifs à **l'analyse de singularités et l'holographie numérique**. Ces thèmes s'inscrivent dans une démarche plus générale de recherche de **modèles et d'outils de traitement d'images** avec pour objectif l'analyse et la mesure de phénomènes physiques. Plusieurs applications ont d'ailleurs été soulignées : l'étude de la diffusion turbulente ou des écoulements fluides en général, le diagnostic d'injecteurs diesels et la chirurgie assistée par ordinateur.

Je voudrais souligner que, tout au long de ce travail, la **dualité entre la théorie et les applications** m'a particulièrement motivé. Les algorithmes et techniques mis en œuvre n'ont pu voir le jour que dans cette démarche pluridisciplinaire qui consiste à associer des outils de traitement d'images, avec des dispositifs intégrant de l'électronique, de l'optique ou plus généralement de la physique. Les progrès réalisés en vélocimétrie par image de particules (PIV) en sont une illustration. Après être passés des systèmes de mesures bidimensionnels aux systèmes stéréoscopiques, nous sommes aujourd'hui sur le point de réaliser des systèmes d'holographie numérique.

Un deuxième point important concerne l'environnement de recherche. J'ai pu trouver au sein du laboratoire TSI et du groupe IMAGE, une ambiance de recherche agréable et de qualité. J'espère pourvoir maintenant contribuer efficacement au développement du groupe dans la perspective de ma responsabilité d'animateur.

Bibliographie

- F. Attneave (1954). "Some informational aspects of visual perception." Psychology revue **61**(3): 183-193.
- C. Barat, C. Ducottet, A. Bilgot et L. Desbat (2003a). Segmentation of blurred objects using wavelet transform : application to X-ray images. Wavelet Applications in Industrial Processing (SPIE) Part of symposium Photonics East 2003, Providence, Rhode Island, USA.
- C. Barat, C. Ducottet et M. Jourlin (2003b). Line Pattern Segmentation Using Morphological Probing. 3rd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, Rome, Italy.
- C. Barat, C. Ducottet et M. Jourlin (2003c). Mise en correspondance de formes à niveaux de gris par palpage morphologique. 19e colloque GRETSI sur le traitement du signal et des images, Paris.
- C. Barat, C. Ducottet et M. Jourlin (2003d). Pattern Matching using Morphological Probing. IEEE ICIP 2003, Barcelona, Spain.
- C. Barat, J. Seneschal et C. Ducottet (2004). Détection de contours par transformée en ondelettes : application à l'étude d'un jet diesel. soumis à RFIA 2004, 14ème Congrès Francophone AFRIF-AFIA de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle, Toulouse.
- F. Bergholm (1987). "Edge focusing." IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **9**(6): 726-741.
- J. Bresenham (1965). "Algorithm for computer control of digital plotter." IBM System Journal **4**: 25-30.
- C. Buraga-Lefebvre, S. Coëtmellec, D. Lebrun et C. Özkul (2000). "Application of wavelet transform to hologram analysis: three-dimensional location of particles." Optics and Lasers in Engineering **33**(6): 409-421.
- J. Canny (1986). "A computational approach to edge detection." IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **8**: 679-698.
- C. H. Chen, J. S. Lee et Y. N. Sun (1995). "Wavelet transform for gray-level corner detection." Pattern Recognition **28**(6): 853-861.
- M. Chouvellon (1999). Etude expérimentale par visualisation et spectrométrie des caractéristiques physiques d'un réacteur sonochimique. Thèse de doctorat, Université Jean Monnet, Saint-Etienne
- S. Coetmellec, C. Buraga-Lefebvre, D. Lebrun et C. Ozkul (2001). "Application of in-line digital holography to multiple plane velocimetry." Measurement Science and Technology **12**: 1392-1397.
- S. Coudert (2002). Mesures 3D par caméras CCD de champs de vitesse dans des écoulements turbulents. Bourse Ministère + Eurodoc avec Univ. de Delft, Université Jean Monnet, Saint-Etienne
- F. Dubois, L. Joannes et J. C. Legros (1999). "An integrated optical set-up for fluid-physics experiments under microgravity conditions." Applied Optics **38**: 7085-7094.
- C. Ducottet, J. Danière, M. Moine, J. P. Schon et M. Courbon (1994). "Localization of objects with circular symmetry in a noisy image by use of wavelet transforms and adaptive correlation." Pattern Recognition **27**(3): 351-364.
- C. Ducottet et J. Fayolle (1997). Détection et suivi d'interfaces d'objets déformables : application à la mécanique des fluides. 16ème colloque GretsI sur le traitement du signal et des images.
- C. Ducottet, J. Fayolle, M. Chouvellon, T. Fournel et F. Trunde (2000). Wavelet based multiscale analysis for feature detection on images. 16th IMACS 2000 World congress on scientific computation, applied mathematics and simulation, Lausanne.

- C. Ducottet, P. Frey et J. Jay (2003). "Fluctuations of bed load solid discharge and grain size distribution on steep slopes with image analysis." accepted in Experiments in Fluids.
- C. Ducottet, J. Jay et M. Courbon (1994). Utilisation d'ondelettes biorthogonales pour caractériser les propriétés dispersives d'un écoulement à partir d'images obtenues par tomographie laser. Colloque TOM : "Temps fréquence, ondelettes et multirésolution : théorie et applications", Lyon, France.
- C. Ducottet, M. Moine, M. Courbon et T. Fournel (1993). Automatic data reduction of a microhologram used to register the position of small particles in a flow. Conference on Digital Processing, Kosice, Slovak Republic.
- J. Fayolle (1996). Etude d'algorithmes de traitement d'images pour l'étude du mouvement d'objets déformables, application à la mesure de vitesses d'écoulements. Thèse de doctorat, Université Jean Monnet, Saint-Etienne
- J. Fayolle, C. Ducottet, T. Fournel et J. P. Schon (1996). Motion characterization of unrigid objects by detecting and tracking feature points. IEEE 1996 International Conference on Image Processing, Lausanne.
- J. Fayolle, C. Ducottet et J. P. Schon (1998). "Application of multiscale characterization of edges to motion determination." IEEE Transaction on Signal Processing, Special issue on filter banks and wavelets **46**(4): 1174-1179.
- J. Fayolle, L. Riou et C. Ducottet (2000). "Robustness of a multiscale scheme of feature points detection." Pattern recognition **33**(9): 1437-1453.
- T. Fournel (1991). Contribution à la mesure de taille, de positions et de vitesses de particules dans des écoulements à partir d'images obtenues par tomographie et par microholographie. Thèse de doctorat, Université Jean Monnet, Saint Etienne
- C. Fournier, C. Ducottet et T. Fournel (2003a). "Digital Holographic Particle Image Velocimetry: 3D velocity field extraction using correlation." accepted in Journal of Flow Visualisation and Image Processing.
- C. Fournier, C. Ducottet et T. Fournel (2003b). Digital Holographic Particle Image Velocimetry: Influence of the reconstruction function on the axial profile of a reconstructed particle. Holographic Particle Image Velocimetry international workshop, Loughborough University, UK.
- J. W. Goodman (1996). Introduction to Fourier optics. New York, McGraw-Hill.
- J. Goutsias et H. J. A. M. Heijmans (2000). "Multiresolution Signal Decomposition Schemes. Part 1: Linear and Morphological Pyramids." IEEE Transactions on Image Processing **9**(11): 1862-1876.
- H. J. A. M. Heijmans et J. Goutsias (2000). "Multiresolution Signal Decomposition Schemes. Part 2: Morphological Wavelets." IEEE Transactions on Image Processing **9**(11): 1897-1913.
- S. Jaffard (1989). "Exposants de Holder en des points donnés et coefficients d'ondelettes." Notes au compte-rendu de l'Académie des Sciences **308**(ser I): 79-81.
- V. Kebbel, M. Adams, H. J. Hartmann et W. Juptner (1999). "Digital holography as a versatile optical diagnostic method for microgravity experiments." Measurement Science and Technology **10**: 893-899.
- M. Khosravi et R. W. Schafer (1996). "Template Matching Based on a Grayscale Hit-Or-Miss Transform." IEEE Transactions on Image Processing **5**(6): 1060-1066.
- L. Kitchen et A. Rosenfeld (1982). "Gray level corner detection." Pattern recognition letters **1**: 95-102.
- T. M. Kreis, M. Adams et W. Juptner (1997). Methods of Digital Holography : A Comparison. SPIE97.
- T. M. Kreis et W. P. O. Juptner (1998). "Principles of digital holography." Hybrid measurement technology in optical metrology **4**: 353-363.

- M. Liebling, T. Blu et M. Unser (2003). "Fresnelets : New Multiresolution Wavelet Bases for Digital Holography." IEEE Transactions on Image Processing **12**(1): 29-43.
- T. Lindeberg (1998). "Edge detection and ridge detection with automatic scale selection." International Journal of Computer Vision **30**: 117-154.
- T. Lindeberg (1999). Principles for automatic scale selection. Handbook on Computer Vision and Applications. B. Jähne. Boston, USA, Academic Press. **2**: 239-274.
- A. Lozano, J. Kostas et J. Soria (1999). "Use of holography in particle image velocimetry measurements of a swirling flow." Experiments in Fluids **1999**(27): 251-261.
- Y. Lue et R. M. Jain (1989). "Behavior of edges in scale space." IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **11**(4): 337-356.
- S. Mallat et W. L. Hwang (1992). "Singularity Detection and Processing with Wavelets." IEEE Transactions on Information Theory **38**(4): 617-643.
- S. Mallat et S. Zhong (1992). "Characterization of Signals from Multiscale Edges." IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **14**(7): 710-732.
- P. H. Malyak et B. J. Thompson (1983). "Particle Velocity Measurement Using Holographic Methods." SPIE Proceedings **427**: 172-179.
- D. Marr et E. Hildreth (1980). "Theory of edge detection." Proceeding of the Royal Society London **B207**: 187-217.
- L. Onural (1993). "Diffraction from a wavelet point of view." Optics Letters **18**(11): 846.
- H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic et L. Onural (1994). "Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms." JOSA A **11**(2): 547-559.
- P. Pellat-Finet (1994). "Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform." Optics Letters **19**(18): 1388-1390.
- A. Rosenfeld et E. Johnston (1973). "Angle detection on digital curves." IEEE Transactions on computers **C22**: 875-878.
- H. Royer (1977). "Holographic velocimetry of submicron particles." Optics Communications **20**(1): 73-75.
- J. P. Schon, F. Danel, J. P. Mélinand, C. Rey et G. Charnay (1979). "Measurement of lagrangian velocity by means of a rotating laser beam." Sixth biennial symposium on turbulence, La Rolla Missouri.
- J. Serra (1982). Analysis and Mathematical Morphology. New York, Academic.
- I. K. Sethi et R. Jain (1987). "Finding trajectories of feature points in a monocular image sequence." IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence **9**(1): 56-73.
- L. S. Shapiro et J. M. Brady (1992). "Feature based correspondence : an eigen vector approach." Image and vision computing **10**(5): 283-288.
- P. Soille, E. Breen et R. Jones (1996). "Recursive implementation of erosions and dilations along discrete lines at arbitrary angles." IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **18**(5): 562-567.
- S. R. Sternberg (1986). "Grayscale Morphology." Computer Vision Graphics Image Processing **35**: 333-355.
- R. Talluri et J. K. Aggarwal (1996). "Mobile robot self location using model-image feature correspondence." IEEE Transactions on robotics and automation **12**(1): 63-77.
- C. H. Teh et R. T. Chin (1989). "On the detection of dominants points on digital curves." IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence **11**(8).
- B. J. Thompson (1965). "A new method of measuring particle size by diffraction techniques." Japanese Journal of Applied Physics **4**(1): 302-307.
- A. Witkin (1983). Scale space filtering. Proceeding International Joint Conference Artificial Intelligence, Karlsruhe; West Germany.

- Yu, Jiang et Bunke (1996). Robust facial profile recognition. IEEE International Conference on Image Processing.
- Zheng (1995). "Automatic feature point extraction and tracking in image sequences for arbitrary camera motion." Internationnal journal of computeur vision **15**: 31-76.